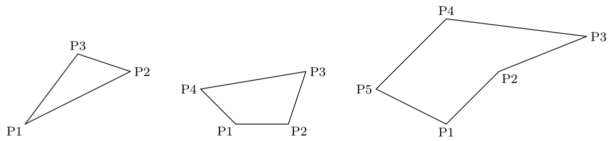
Klassenstufen 11–13

Bitte jeweils in Teams von 3–5 Schülern bearbeiten.

Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

Aufgabe 1 (10 Punkte):

Verbindet man $n \geq 3$ unterschiedliche Punkte $P_1, \ldots, P_n$ der Ebene durch Strecken $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, …, $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$, so erhält man ein n-Eck, siehe folgende Beispiele für $n = 3, 4, 5$:



Haben alle Strecken $\overline{P_iP_{i+1}}$ die gleiche Länge, so spricht man von einem *gleichseitigen* n-Eck. Besitzen zusätzlich auch noch alle Innenwinkel denselben Wert, so spricht man von einem *regelmäßigen* n-Eck. Eine Diagonale ist eine Verbindungslinie zwischen zwei nicht benachbarten Eckpunkten.

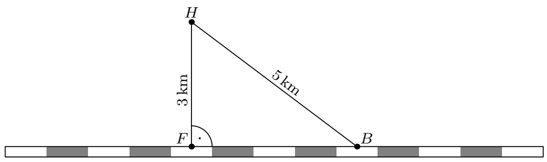
(a) Durch Hinzufügen sich nicht überschneidender Diagonalen, die bis auf ihre Endpunkte ganz im Inneren liegen, kann man ein n-Eck in Dreiecke zerlegen (z. B. ein Viereck in zwei Dreiecke oder ein Fünfeck in drei Dreiecke). Wieviele Dreiecke erhält man, wenn man ein konvexes 2011-Eck (alle Diagonalen liegen im Inneren) trianguliert? (Tipp: Die Frage kann auch für ein allgemeines (konvexes) n-Eck beantwortet werden.)

(b) Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 180°. Wie lautet die Summe der Innenwinkel eines konvexen 2011-Ecks? (Hierzu kann man die Triangulierungen aus Aufgabenteil (a) verwenden. Als Start kann man zunächst die Innenwinkelsumme eines Vierecks bzw. Fünfecks ausrechnen.)

(c) Zeige, dass die Winkelsumme zweier benachbarter Innenwinkel in einem überschneidungsfreien gleichseitigen 2011-Eck mindestens 90° beträgt. (Es muss sich hierbei nicht zwingend um ein konvexes oder ein regelmäßiges 2011-Eck handeln.)

Aufgabe 2 (10 Punkte):

Eine Fabrik H liegt (Luftlinie) 3 km von einer Bahnstrecke entfernt, die annähernd geradlinig verläuft. Direkt an der Bahnstrecke liegt eine weitere Fabrik B, wobei die Entfernung (Luftlinie) zwischen Fabrik H und Fabrik B genau 5 km beträgt. Um Rohstoffe von Fabrik H zu Fabrik B zu transportieren, soll eine Seilbahn ausgehend von Fabrik H zu einem beliebigen Punkt X direkt an der Bahnstrecke gebaut werden.



Die Rohstoffe werden dann ausgehend von Fabrik H per Seilbahn zu Punkt X und von dort per Bahn weiter zu Fabrik B transportiert. Da es sich um eine langfristige Investition handelt, sind die Baukosten der Seilbahn vernachlässigbar und es sollen nur die Transportkosten minimiert werden. Für eine Mengeneinheit betragen die Transportkosten 5 Geldeinheiten pro mit der Seilbahn zurückgelegtem Kilometer und 3 Geldeinheiten pro mit der Bahn zurückgelegtem Kilometer.

(a) Sei F der Punkt auf der Bahnlinie, welcher eine Entfernung von 3 km zu Fabrik H besitzt. Wie groß ist die Entfernung zwischen F und Fabrik B?

(b) Wie lauten die Transportkosten pro Einheit in Abhängigkeit von Punkt X? (Verwende eine geeignete Koordinatendarstellung.)

(c) Wo liegt der optimale Punkt X und wie lauten die zugehörigen minimalen Transportkosten?

Aufgabe 3 (12 Punkte):

Als *Polynom* bezeichnen wir einen Ausdruck der Form $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$. Die Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ heißen dabei *Koeffizienten* und n *Grad* des Polynoms (falls $a_n \neq 0$).

(a) Berechne den Ausdruck $s_2\Big(f(x)\Big) = \frac{f(x)^2 + f(x^2)}{2}$ für $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

(b) *Partialbruchzerlegung*: Jede rationale Funktion der Form $\frac{p(x)}{(x-a)^k(x-b)^l}$, wobei $p(x)$ ein Polynom vom Grad kleiner als $k+l$ ist, lässt sich darstellen als

$$\frac{p(x)}{(x-a)^k(x-b)^l} = \sum_{i=1}^{k} \frac{u_i}{(x-a)^i} + \sum_{j=1}^{l} \frac{v_j}{(x-b)^j}$$

mit reellen Zahlen $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l$. Wie lautet eine solche Zerlegung des in Teilaufgabe (a) berechneten Ausdrucks? (Falls Ihr (a) nicht herausbekommen habt, könnt Ihr stattdessen die rationale Funktion $\frac{1}{(1-x)(1+x)^2}$ verwenden.)

(c) Das n-te Taylorpolynom einer Funktion f an der Stelle 0 ist gegeben durch

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \frac{f^{(0)}(0)}{1} + \frac{f^{(1)}(0)}{1} \cdot x + \frac{f^{(2)}(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6} \cdot x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n,$$

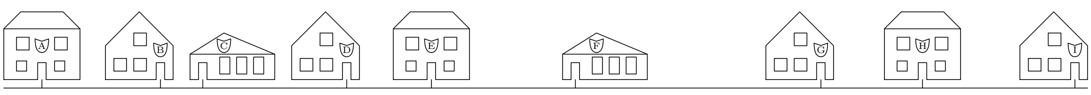
wobei $f^{(k)}$ entsteht, indem man die Funktion f k-mal nach x ableitet. Berechne das 1-te, 2-te, 3-te und 4-te Taylorpolynom der Partialbruchzerlegung aus Teilaufgabe (b). (Falls Ihr (b) nicht herausbekommen habt, könnt Ihr stattdessen $f(x) = (1+x)^{-3} + \frac{(1-x)^{-1}}{2} + \frac{(1+x)^{-1}}{2}$ verwenden.)

(d) Berechne die Summe der Koeffizienten des Polynoms $(X^2 - X + 1)^{2011}$. (Tipp: Falls Ihr keine Idee habt, multipliziert zunächst die Ausdrücke $(X^2 - X + 1)^2$, $(X^2 - X + 1)^3$ und $(X^2 - X + 1)^4$ aus und berechnet deren Koeffizientensumme.)

Aufgabe 4 (8 Punkte):

Betrachten wir einen Postboten, der seine Post ausgehend von einem Depot verteilt. D. h. er nimmt eine gewisse Menge an Post, verteilt sie und kehrt zu seinem Depot zurück. Damit er sich seine Touren besser einteilen kann, kann er sich den Standort seines Depots frei aussuchen, natürlich mit den Ziel möglichst wenig laufen zu müssen.

Etwas vereinfachend und abstrahiert betrachten wir folgendes Problem in einer schnurgeraden Straße mit neun Häusern (nummeriert von A bis I):



An welcher Position X in der Straße (diese muss nicht, aber könnte, mit einem der neun Häuser übereinstimmen), sollte der Postbote sein Depot einrichten lassen, so dass die Summe der Abstände

$$|AX| + |BX| + |CX| + |DX| + |EX| + |FX| + |GX| + |HX| + |IX|$$

möglichst kurz ist?

Hinweis: Während die Reihenfolge der Häuser bekannt ist (siehe oben), sind die genauen Abstände nicht bekannt. Die Skizze oben dient nur zur Orientierung. Evtl. ist es hilfreich zunächt den Fall mit nur zwei Häusern zu analysieren.