Klassenstufen 9–10

Bitte jeweils in Teams von 3–5 Schülern bearbeiten.

Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

Aufgabe 1 (15 Punkte):

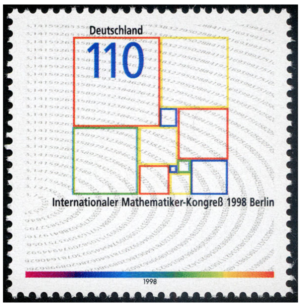

Abbildung 1: Sondermarke aus dem Jahr 1998.

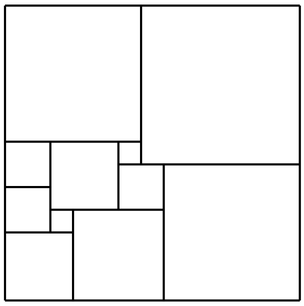

Abbildung 2: Fliesplan für ein kleines Zimmer.

Auf der Briefmarke in Abbildung 1 ist eine Zerlegung eines 177×176-Rechtecks aus lauter unterschiedlichen Quadraten dargestellt. Hierbei sind die Seitenlängen der Quadrate jeweils ganzzahlig. Leider hat der zuständige Postbeamte die einzelnen Seitenlängen verbaselt. Glaubst Du, es ist möglich die Seitenlängen auszurechnen?

Da das Ausrechnen der richtigen Seitenlängen zu aufwändig für diesen Wettbewerb wäre, schauen wir uns stattdessen ähnliche Probleme an. Betrachte ein quadratisches Zimmer mit Seitenlänge 2,6 m, das mit quadratischen Fliesen der Seitenlänge $2 \cdot n$ dm gefliest werden soll. Hierbei können unterschiedlich große Fliesen verwendet werden und n kann jeweils eine natürliche Zahl zwischen 1 und 12 sein.

(a) Bestimme die minimale Anzahl an Fliesen, wenn genau eine davon $2 \cdot 12\,\text{dm} \times 2 \cdot 12\,\text{dm}$ groß sein muss.

(b) Bestimme die minimale Anzahl an Fliesen, wenn genau eine davon $2 \cdot 11\,\text{dm} \times 2 \cdot 11\,\text{dm}$ groß sein muss.

(c) Bestimme die minimale Anzahl an Fliesen, wenn genau eine davon $2 \cdot 10\,\text{dm} \times 2 \cdot 10\,\text{dm}$ groß sein muss.

(d) Ermittle die Seitenlängen der Fliesen, wenn das Zimmer gemäß Abbildung 2 gefliest werden soll. (Die Seitenlängen sollen ausgerechnet, nicht gemessen werden. Evtl. ist es hilfreich viele Unbekannte zu verwenden.)

Aufgabe 2 (10 Punkte):

Gegeben sind 2011 positive reelle Zahlen, von denen keine zwei gleich sind. Das Produkt von je fünf dieser Zahlen ist stets größer als 1.

(a) Wie viele Zahlen können unter diesen Voraussetzungen maximal kleiner oder gleich 1 sein? Gebe ein Beispiel an, für das diese Maximalzahl angenommen wird.

(b) Zeige, dass das Produkt aller 2011 Zahlen größer als 1 ist.

(c) Wie sieht es aus, wenn 2011 paarweise verschiedene positive reelle Zahlen gegeben sind, bei denen das Produkt aus je 67 dieser Zahlen größer als 1 ist. Ist auch hier das Produkt aller Zahlen größer als 1? Begründe Deine Behauptung.

Aufgabe 3 (10 Punkte):

Auf einem sehr leistungsschwachen Computer können vier Programme – ein Textverarbeitsprogramm (T), ein Internetbrowser (I), ein MP3-Player (M) und ein Graphikprogramm (G) – ausgeführt werden. Wird eine Teilmenge $\emptyset \subseteq U \subseteq \{T, I, M, G\}$, wie z. B. $\{I, M, G\}$, dieser Programme ausgeführt, so kann der Computer entweder abstürzen oder ordnungsgemäß weiterlaufen. (Die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge U.) Stürzt der Computer für eine Menge U von gleichzeitig ausgeführten Programmen nicht ab, so nehmen wir an, dass er ebenfalls ordnungsgemäß weiterarbeitet, sobald man eine Teilmenge $V \subseteq U$ von Programmen gleichzeitig ausführt. Analog nehmen wir an, dass wenn der Computer bei einer Menge U von gleichzeitig ausgeführten Programmen abstürzt, er dies auch bei allen Teilmengen V, die U als Teilmenge enthalten, tun.

(a) Wieviele unterschiedliche Teilmengen $\emptyset \subseteq S \subseteq \{T, I, G\}$ (von $\{T, I, G\}$) gibt es?

(b) Durch Ausprobieren haben wir herausgefunden, dass der Computer bei $\{T, M\}$ und $\{T, G\}$ abstürzt, bei $\{T\}$ oder $\{I\}$ aber ordnungsgemäß weiterläuft. Bei welchen Kombinationen stürzt er definitiv ab, bei welchen läuft er korrekt weiter und bei welchen kann man es ohne weitere Tests nicht genau sagen.

(c) Betrachten wir einen anderen Computer (als in Aufgabenteil (b)), der sich wie folgt verhält: Absturz bei $\{G\}$, $\{T, G\}$, $\{I, G\}$, $\{M, G\}$, $\{T, I, G\}$, $\{T, M, G\}$, $\{I, M, G\}$ oder $\{T, I, M, G\}$ bzw. ordnungsgemäße Funktion bei $\emptyset$, $\{T\}$, $\{I\}$, $\{M\}$, $\{T, I\}$, $\{T, M\}$, $\{I, M\}$ oder $\{T, I, M\}$. In Aufgabenteil (b) konnte man auch nach vier Tests ($\{T, M\}$, $\{T, G\}$, $\{T\}$, $\{I\}$) das Verhalten des Computers noch nicht eindeutig herausfinden. Kann man es bei unserem neuen Beispiel mit einem geschickt ausgewählten Test herausfinden? Wie sieht es bei zwei bzw. drei erlaubten Tests aus?

Aufgabe 4 (10 Punkte):

Leonie fährt mit ihrem Fahrrad am Bahndamm entlang. Sie stellt fest, dass ihr alle 14 Minuten eine Straßenbahn entgegenkommt. Alle 18 Minuten wird die Schülerin von einer anderen Straßenbahn eingeholt.

(a) In welchen (identischen) Zeitabständen fahren die Straßenbahnen regelmäßig in beiden Richtungen, wenn man konstante Geschwindigkeiten sowohl bei den Straßenbahnen als auch bei Leonie annimmt? (Das Verwenden von mehr als zwei Unbekannten könnte sich als nützlich erweisen.)

(b) Gibt es ganze Zahlen a, b so, dass der Bruch $\frac{a(a-b)}{a+b}$ eine ganze Zahl ist? Gibt es Beispiele mit $a > b \geq 1$? Begründe Deine Antworten. (Es ist nicht nötig, herauszufinden, was Aufgabenteil (b) mit Aufgabenteil (a) zu tun haben könnte.)