Lösungen Klassenstufen 11–13

Vorbemerkung: Im Folgenden geben wir jeweils eine mögliche Lösung zu den Wettbewerbsaufgaben des 6. Bayreuther Tags der Mathematik an. Natürlich kann es auch andere, evtl. sogar elegantere, Lösungswege geben. Über Hinweise zu alternativen Lösungswegen würden wir uns sehr freuen und auch bei Unklarheiten oder Fehlern möchten wir gerne davon hören; z. B. per Email an `sascha.kurz@uni-bayreuth.de`. Wir haben es uns nicht nehmen lassen bei manchen Aufgaben noch einige Bemerkungen zum Hintergrund und den Verknüpfungen zur Universitätsmathematik anzugeben. Diese können teilweise schwieriger nachzuvollziehen sein – klar, es wird ja auch Universitätsstoff angedeutet. Wir hoffen, dass sich anfängliches Zurückschrecken in Erstaunen darüber wandeln wird, wie mächtig mathematische Methoden sein können und wozu sie eingesetzt werden können.

Aufgabe 1:

(a) Zieht man in ein konvexes n-Eck die Diagonale $\overline{P_1P_3}$, so entsteht ein Dreieck und ein $(n-1)$-Eck. Die Triangulierung eines n-Ecks besteht also aus genau einem Dreieck mehr als die eines $(n-1)$-Ecks. Induktiv zeigt man also, dass die Triangulierung eines n-Ecks aus $(n-2)$ Dreiecken, bei einem 2011-Eck also insbesondere aus 2009 Dreiecken, besteht.

(b) Die Innenwinkelsumme eines n-Ecks ergibt sich, indem man die Innenwinkelsummen aller Dreiecke einer Triangulierung addiert. Somit ergibt sich eine Innenwinkelsumme von $(n-2)\cdot 180°$ bei einem allgemeinen n-Eck bzw. eine Innenwinkelsumme von $2009\cdot 180°$ bei einem 2011-Eck.

(c) Die zwei Innenwinkel entstehen, indem man eine Kette aus drei gleich langen Strecken betrachtet, wir betrachten also einen Ausschnitt des 2011-Ecks, welcher in Abbildung 1 und 2 durch die schwarzen Linien hervorgehoben ist. Beträgt bereits einer der beiden Innenwinkel 90° oder mehr, so beträgt die Summe der beiden Innenwinkel $\alpha+\beta$ ebenfalls mindestens 90°, siehe Abbildung 1. Wir gehen also im Folgenden davon aus, dass dies nicht der Fall ist. Versuchen wir die Summe der beiden Innenwinkel so klein wie möglich zu machen, so können wir weiterhin davon ausgehen, dass sich die beiden äußeren Strecken berühren, siehe Abbildung 2. Ansonsten könnten wir eine der beiden äußeren Strecken noch weiter „reindrehen“. Es entsteht also ein gleichschenkliges Dreieck mit Seitenlängen 1, 1 und $x \le 1$, wenn wir davon ausgehen, dass alle Seiten des Ausgangspolygons eine (normierte) Länge von 1 besitzen. (Wir können alternativ auch einen Parameter l für die Seitenlängen einführen, der aber für unsere Betrachtungen keine Rolle spielt.) Wegen der Gleichschenkligkeit gilt $\gamma=\beta$. Da die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck 180° beträgt, erhalten wir nach Einsetzen von $\gamma=\beta$ die Gleichung $\alpha+2\beta=180°$. $\alpha+\beta$ wird mit dieser Nebenbedingung minimiert, wenn α so klein und β so groß wie möglich wird. Also $\alpha=0$ und $\beta=90°$, so dass in jedem Fall $\alpha+\beta\ge 90°$ gelten muss (wobei Gleichheit auch noch ausgeschlossen werden könnte).

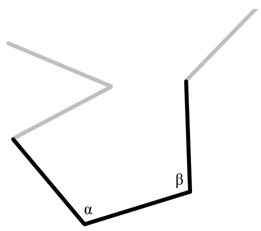


Abbildung 1: Ist mindestens einer der beteiligten Winkel größer als 90°, folgt die Aussage direkt.

Die Tatsache ein beliebiges n-Eck in Dreiecke zu zerlegen erweist sich als sehr nützlich: Auf Dreiecken lässt sich leichter rechnen als auf allgemeinen n-Ecken (frei nach dem Motto „Teile und herrsche.“). Das machen sich unter anderem Ingenieure zunutze, wenn sie die Belastung

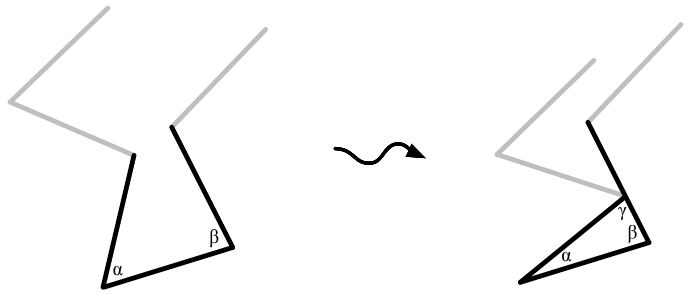
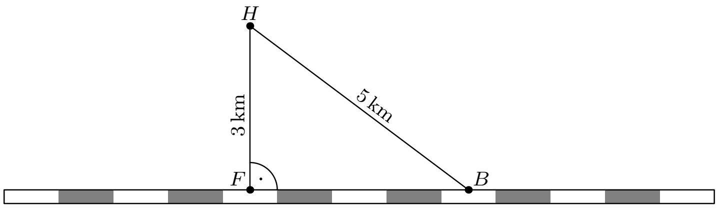


Abbildung 2: Sind beide beteiligten Winkel kleiner als 90°, erhalten wir durch Drehen einer der Strecken ein Dreieck.

bestimmen möchten, die auf einzelnen Bauteilen herrscht: Statt alles auf einen Schlag betrachten zu müssen, kann man die Berechnungen so „häppchenweise“ durchführen und anschließend wieder zusammensetzen. Dieses Vorgehen heißt *Finite Elemente Methode*. Ein berühmtes Beispiel für den erfolgreichen Einsatz von FEM ist das Dach des Münchner Olympiastadions, welches ohne diese Technik nicht machbar gewesen wäre.

Aufgabe 2:



(a) Wir wählen unser Koordinatensystem so, dass die Bahnlinie mit der x-Achse zusammenfällt und der Punkt $F = (0,0)$ im Ursprung liegt. Gehen wir ohne Einschränkung davon aus, dass Fabrik H *rechts* von Punkt F liegt, so ergeben sich die Koordinaten $(0,3)$ für Fabrik H. Da Fabrik B direkt an der Bahnlinie liegt, muss es Koordinaten $(b,0)$ besitzen, wobei b zunächst noch eine Unbekannte ist. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ergibt sich der Abstand zwischen H und B als $\sqrt{3^2+b^2}$. Da wir wissen, dass dieser Abstand 5 km beträgt, muss $b = 4$ oder $b = -4$ gelten. Ohne Einschränkung gehen wir von $b = 4$ aus. (Andernfalls könnten wir einfach die Konfiguration an der y-Achse spiegeln.) Der Abstand zwischen F und Fabrik B beträgt nun genau 4 km.

(b) Da Punkt X ebenfalls direkt an der Bahnlinie liegt, besitzt er Koordinaten $(x,0)$. Somit ist die Länge der Seilbahn durch $\sqrt{x^2+3^2}$ und die Länge des verwendeten Bahnstreckenabschnitts durch $\sqrt{(x-4)^2+0^2} = |4-x|$ gegeben. Die Gesamttransportkosten lauten demnach

$$K(x) = 5 \cdot \sqrt{x^2+3^2} + 3 \cdot |4-x|.$$

Zu berücksichtigen ist, dass der Punkt X auch links von F oder rechts von B liegen könnte.

(c) Momentan müssen wir noch von $x \in (-\infty, \infty)$ ausgehen. Mit ein bisschen Argumentation können wir aber den Bereich für potentiell gute Positionen $X = (x,0)$ leicht einschränken. Für X links von F, also $x < 0$, wäre z. B. $X = F$ eine kostengünstigere Alternative, da $K(x) = 5 \cdot \sqrt{x^2+3^2} + 3 \cdot |4-x| > 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = K(0)$. Falls X rechts von B liegen würde, also $x > 4$, so wäre $X = B$ eine kostengünstigere Alternative, da $K(x) = 5 \cdot \sqrt{x^2+3^2} + 3 \cdot |4-x| > 5 \cdot \sqrt{4^2+3^2} + 3 \cdot 0 = K(4)$. Wir können also im folgenden von $x \in [0,4]$ ausgehen und können die Formel für die Transportkosten etwas vereinfachen:

$$K(x) = 5 \cdot \sqrt{x^2+3^2} + 3 \cdot (4-x).$$

Das globale Minimum der stetigen, auf $[0,4]$ eingeschränkten, Funktion $K(X)$ wird entweder am Rand $x=0$ bzw. $x=4$ oder im Inneren angenommen. Lokale Extrema im Inneren einer differenzierbaren Funktionen besitzen eine Steigung von Null. Für $0 \leq x \leq 4$ ist $K'(x)=0$ äquivalent zu

$$\begin{array}{rcll} 5 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3^2}} - 3 & = & 0 & \Longrightarrow \\ 25x^2 & = & 9(x^2+3^2) & \Longleftrightarrow \\ 16x^2 & = & 9^2 & \Longleftrightarrow \\ x & = & \pm\frac{9}{4}. & \end{array}$$

Wegen $0 \leq x \leq 4$ bleibt nur $x = \frac{9}{4}$ als Kandidat für ein inneres Minimum.

Es gilt $K(0) = 5\cdot 3+3\cdot 4 = 27$, $K(4) = 5\cdot 5+3\cdot 0 = 25$ und $K\left(\frac{9}{4}\right) = 5\cdot\frac{\sqrt{9^2+12^2}}{4} + 3\cdot\frac{7}{4} = 24$. Das globale Minimum liegt also bei $x = \frac{9}{4}$ mit Transportkosten von 24.

Aufgabe 3:

(a) Setzen wir $f(x) = \frac{1}{1-x}$ in $s_2\Big(f(x)\Big) = \frac{f(x)^2 + f\left(x^2\right)}{2}$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} s_2(f(x)) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)(1+x)}\right) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}. \end{aligned}$$

(b) Es bietet sich an von dem mittleren Term $(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)(1+x)}\right))$ aus zu starten. (Man kann auch den rechten Term direkt verwenden, muss dann nur etwas mehr rechnen.) Nach der angegebenen Formel für die Partialbruchzerlegung sollen Zahlen u_1 und v_1 bestimmt werden, so dass

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{u_1}{1-x} + \frac{v_1}{1+x}$$

gilt (wir brauchen uns nur darum kümmern, siehe vorletzten Schritt in (a)). Multiplikation beider Seiten mit $(1-x)(1+x)$ liefert

$$1 = u_1 + v_1 + (v_1 - u_1)x.$$

Da die Koeffizienten der Polynome auf der linken Seite mit denen auf der rechten Seite übereinstimmen müssen, erhalten wir die zwei Gleichungen $u_1 + v_1 = 1$ und $v_1 - u_1 = 0$. Da die eindeutige Lösung durch $u_1 = \frac{1}{2}$, $v_1 = \frac{1}{2}$ gegeben ist, gilt

$$s_2(f(x)) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}.$$

Berechnen wir nun alternativ die Partialbruchzerlegung der Funktion $g(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)^2}$. Nach der angegebenen Formel für die Partialbruchzerlegung sollen Zahlen u_1, v_1 und v_2 bestimmt werden, so dass

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{u_1}{1-x} + \frac{v_1}{1+x} + \frac{v_2}{(1+x)^2}$$

gilt. Multiplikation beider Seiten mit $(1-x)(1+x)^2$ liefert

$$1 = u_1 + v_1 + v_2 + (2u_1 - v_2)x + (u_1 - v_1)x^2.$$

Da die Koeffizienten der Polynome auf der linken Seite mit denen auf der rechten Seite übereinstimmen müssen, erhalten wir die drei Gleichungen $1 = u_1 + v_1 + v_2$, $2u_1 - v_2 = 0$

und $u_1 - v_1 = 0$, deren eindeutige Lösung durch $u_1 = \frac{1}{4}$, $v_1 = \frac{1}{4}$ und $v_2 = \frac{1}{2}$ gegeben ist. Die Partialbruchzerlegung lautet damit

$$g(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Mit Hilfe eines Computeralgebrasystems wie beispielsweise `Maple` kann man Partialbruchzerlegungen einer rationalen Funktion $g(x)$ ausrechnen lassen, das Kommando hierzu lautet `convert(g(x),parfrac,x)`.

(c) Betrachten wir zunächst die Funktion

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-2} + \frac{1}{4} \cdot (1-x)^{-1} + \frac{1}{4} \cdot (1+x)^{-1}.$$

Da die 0-te Ableitung die Funktion selber ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
f_1^{(0)}(x) &= \frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-2} + \frac{1}{4} \cdot (1-x)^{-1} + \frac{1}{4} \cdot (1+x)^{-1} \\
f_1^{(1)}(x) &= (1-x)^{-3} + \frac{1}{4} \cdot (1-x)^{-2} - \frac{1}{4} \cdot (1+x)^{-2} \\
f_1^{(2)}(x) &= 3 \cdot (1-x)^{-4} + \frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-3} + \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-3} \\
f_1^{(3)}(x) &= 12 \cdot (1-x)^{-5} + \frac{3}{2} \cdot (1-x)^{-4} - \frac{3}{2} \cdot (1+x)^{-4} \\
f_1^{(4)}(x) &= 60 \cdot (1-x)^{-6} + 6 \cdot (1-x)^{-5} + 6 \cdot (1+x)^{-5}
\end{aligned}$$

bzw. allgemein

$$f_1^{(k)}(x) = \frac{(k+1)!}{2} \cdot (1-x)^{-(k+2)} + \frac{k!}{4} \cdot (1-x)^{-(k+1)} + (-1)^k \cdot \frac{k!}{4} \cdot (1+x)^{-(k+1)}.$$

Hiermit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= 1 + x \\
T_2(x) &= 1 + x + 2x^2 \\
T_3(x) &= 1 + x + 2x^2 + 2x^3 \\
T_4(x) &= 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 \\
T_k(x) &= \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{i+1}{2} + \frac{1+(-1)^i}{4} \right) x^k
\end{aligned}$$

Für die Funktion $f_2(x) = (1+x)^{-3} + \frac{(1-x)^{-1}}{2} + \frac{(1+x)^{-1}}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
f_2^{(0)}(x) &= (1+x)^{-3} + \frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-1} + \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-1} \\
f_2^{(1)}(x) &= -3 \cdot (1+x)^{-4} + \frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-2} - \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-2} \\
f_2^{(2)}(x) &= 12 \cdot (1+x)^{-5} + (1-x)^{-3} + (1+x)^{-3} \\
f_2^{(3)}(x) &= -60 \cdot (1+x)^{-6} + 3 \cdot (1-x)^{-4} - 3 \cdot (1+x)^{-4} \\
f_2^{(4)}(x) &= 360 \cdot (1+x)^{-7} + 12 \cdot (1-x)^{-5} + 12 \cdot (1+x)^{-5} \\
f_2^{(k)}(x) &= (-1)^k \cdot \frac{(k+2)!}{2} \cdot (1+x)^{-(k+3)} + \frac{k!}{2} \cdot (1-x)^{-(k+1)} \\
&\quad +(-1)^k \cdot \frac{k!}{2} \cdot (1+x)^{-(k+1)}
\end{aligned}$$

woraus sich

$$\begin{aligned}
T_1(X) &= 2 - 3x \\
T_2(X) &= 2 - 3x + 7x^2 \\
T_3(X) &= 2 - 3x + 7x^2 - 10x^3 \\
T_4(X) &= 2 - 3x + 7x^2 - 10x^3 + 16x^4 \\
T_k(X) &= \sum_{i=0}^{k} \left((-1)^i (i+1)(i+2) + \frac{1 + (-1)^i}{2} \right) x^i
\end{aligned}$$

ergibt.

Für die Funktion $f_3(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
f_3^{(0)}(x) &= \frac{1}{4} \cdot (1-x)^{-1} + \frac{1}{4} \cdot (1+x)^{-1} + \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-2} \\
f_3^{(1)}(x) &= \frac{1}{4} \cdot (1-x)^{-2} - \frac{1}{4} \cdot (1+x)^{-2} - (1+x)^{-3} \\
f_3^{(2)}(x) &= \frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-3} + \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-3} + 3 \cdot (1+x)^{-4} \\
f_3^{(3)}(x) &= \frac{3}{2} \cdot (1-x)^{-4} - \frac{3}{2} \cdot (1+x)^{-4} - 12 \cdot (1+x)^{-5} \\
f_3^{(4)}(x) &= 6 \cdot (1-x)^{-5} + 6 \cdot (1+x)^{-5} + 60 \cdot (1+x)^{-6} \\
f_3^{(k)}(x) &= \frac{k!}{4} \cdot (1-x)^{-(k+1)} + (-1)^k \cdot \frac{k!}{4} \cdot (1+x)^{-(k+1)} \\
&\quad + (-1)^k \cdot \frac{(k+1)!}{2} \cdot (1+x)^{-(k+2)}
\end{aligned}$$

woraus sich

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= 1 - x \\
T_2(x) &= 1 - x + 2x^2 \\
T_3(x) &= 1 - x + 2x^2 - 2x^3 \\
T_4(x) &= 1 - x + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 \\
T_k(x) &= \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1 + (-1)^i}{4} + (-1)^i \cdot \frac{i+1}{2} \right) x^i
\end{aligned}$$

ergibt.

(d) In jedem Polynom $f(x) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ bekommt man die Summe der Koeffizienten, wenn man 1 einsetzt:

$$f(1) = a_n \cdot 1^n + \cdots + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0.$$

Bei unserem Polynom erhalten wir demnach

$$(1^2 - 1 + 1)^{2011} = 1^{2011} = 1$$

als Summe der Koeffizienten.

Polynome sind nützliche (Hilfs-)Objekte in der Mathematik. Der Vektorraum der Polynomfunktionen begegnet einem bereits im ersten Semester des Mathematikstudiums in der „Linearen Algebra“. („Vektorraum“ sagt im wesentlichen nur, dass man Polynome addieren, subtrahieren und mit Skalaren multiplizieren kann, wobei einige der von ganzen Zahlen bekannten Rechenregeln gelten. Ein solches abstraktes Konzept dient dazu, allgemeingültige Aussagen zu formulieren, um nicht jeden Spezialfall einzeln behandeln zu müssen.) Polynome bzw. Potenzreihen (Polynome mit unendlich vielen Koeffizienten) werden u. a. recht häufig zum Zählen von diskreten Objekten (Kombinatorik) eingesetzt. In den Teilaufgaben (a)–(b) zählt man beispielsweise folgende diskrete Objekte: Betrachte eine Schnur, auf der Perlen aufgereiht sind. Wieviele solche Schnüre mit genau k Perlen gibt es nun? Natürlich genau eine für jedes k. Diese Information könnten wir nun durch eine Funktion ($a(k) = 1$) oder eine Tabelle

k	0	1	2	3	4	5	6	...
#	1	1	1	1	1	1	1	...

ausdrücken. Dieser technische Aufwand für diese einfach Frage ist zwar etwas übertrieben, aber wir wollen hieran etwas exemplarisch erkären und werden recht schnell zu Dingen kommen, die nicht mehr so offensichtlich sind. Eine andere – zugegebenermaßen etwas gewöhnungsbedürftige – Art so eine Tabelle hinzuschreiben ist, ein Polynom bzw. eine Potenzreihe zu verwenden. Wir schreiben einfach alle Zahlen nebeneinander und multiplizieren sie, um sie auseinander halten zu können mit x^k. In unserem Beispiel ergibt sich

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots$$

Das sieht noch komplizierter aus und scheint zunächst wertlos. Der Vorteil ist jedoch, dass man mit diesen Polynomen bzw. Potenzreihen rechnen kann. Ein richtiger Nutzen ergibt sich, wenn wir die unendliche Tabelle bzw. die zugehörige unendliche Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ betrachten. Für diese gibt es nämlich einen sehr kompakten Term: $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Wir können also eine unendlich große Tabelle sehr sehr knapp darstellen. In $\frac{1}{1-x}$ steckt die selbe Information wie in unserer unendlichen Tabelle bzw. der exakten Formel $a(k) = 1$. Wirklich ansehen kann man dem $\frac{1}{1-x}$ als Nichtkombinatoriker allerdings nicht. Mit Hilfe der Taylorentwicklung einer Funktion könnten wir aber wieder zurück zu den Potenzreihen bzw. Polynomen und dann weiter zu den unendlichen bzw. endlichen Tabellen kommen, die auch von einem *normalen* Menschen gelesen werden können. Das $f(x)$ aus der Aufgabenstellung *zählt* also sozusagen die möglichen Perlenketten nach der Anzahl der verwendeten Perlen.

Betrachten wir ein komplizierteres Beispiel, bei dem wir auch wirklich mit dem Ausdruck $\frac{1}{1-x}$ rechnen. Wir nehmen dazu zwei solche Perlenketten, die an einem Ende zusammengebunden sind. Wenn wir die linke und die rechte Schnur auseinanderhalten können (zum Beispiel, da sie unterschiedliche Farben haben), dann ergeben sich die möglichen Anzahlen durch Multiplikation. Gibt es z. B. vier unterschiedliche Perlenschnüre, so gibt es $4 \cdot 4 = 16$ mögliche Paare von Perlenschnüren. Vorher waren wir aber etwas genauer. Da haben wir die Anzahl möglicher Perlenschnüre bei vorgegebener Anzahl an Perlen sagen können. Einfache Perlenketten mit bis zu vier Perlen werden durch das Polynom $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ abgezählt. Wenn wir wissen wollen, wie viele Paare von Perlenschnüren es mit genau drei Perlen gibt, dann gibt es mehrere Möglichkeiten: links könnte keine und rechts drei Perlen sein, links könnten zwei und rechts eine Perle sein, ... Wenn wir nun einfach das Polynom quadrieren, werden genau die richtigen Koeffizienten zusammengesammelt:

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4) = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+4x^5+3x^6+2x^7+x^8$$

Es gibt also genau fünf Möglichkeiten mit genau vier Perlen. Anstatt mit endlichen Polynomen können wir die selbe Rechnung auch mit unendlichen Tabellen (in Form von Potenzreihen) rechnen:

$$f(x)^2 = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots.$$

Wenn wir aber davon ausgehen, dass wir die linke und rechte Perlenkette nicht auseinanderhalten können (weil die zwei Ketten frei vertauschbar sind), so wird das Ganze etwas komplizierter. Betrachten wir erst einmal wieder nur Zahlen. Wenn es für eine Perlenkette nur vier Möglichkeiten gibt, so gibt es $4 \cdot 4 = 16$ Paare. Da wir aber links und rechts vertauschen dürfen teilen wir noch durch zwei. In den Fällen, wo links und rechts die gleiche Perlenkette war, haben wir damit den Fehler gemacht den wir korrigieren können, wenn wir $\frac{4}{2}$ dazu addieren.

Wenn wir nun noch die Anzahl der Perlen berücksichtigen wollen, hilft uns die Funktion s_2. Sie setzt die selbe Idee, wie eben bei dem Zahlenbeispiel beschrieben, für Potenzreihen um.

(Wenn links und rechts die selbe Perlenkette ist, werden insgesamt doppelt so viele Perlen benötigt, wie bei einer Perlenkette alleine – deswegen der Ausdruck $f(x^2)$.)

In Aufgabenteil (a) haben wir also einen Term ausgerechnet, der alle Informationen über die Anzahlen möglicher Perlenkette (bis auf Symmetrie) enthält. Die Aufgabenteile (b) und (c) haben diese Information etwas umgeformt, so dass sie für Nichtkombinatoriker lesbarer wird. Am Ende haben wir sogar die exakte Formel $\frac{k+1}{2} + \frac{1+(-1)^k}{4}$ für die Anzahl möglicher Perlenketten aus k Perlen erhalten.

Das schöne an diesem Ansatz ist, dass er eigentlich immer funktioniert. Wenn wir drei Perlenketten haben, die frei vertauschbar sind, brauchen wir einfach eine andere Funktion:

$$s_3\Big(f(x)\Big) = \frac{f(x)^3 + 3f(x)f(x^2) + 2f(x^3)}{6}.$$

Wichtig ist nur, welche Vertauschungen erlaubt sind. Die Menge dieser Vertauschungen bildet eine sogenannte *Gruppe* (begegnet einem im Mathematikstudium spätestens in der „Einführung in die Algebra“). Eine Funktion wie s_3 ist der sogenannte *Zyklenzeiger* zu so einer Gruppe. Man könnte zum Beispiel auch Perlenketten an alle 8-Ecken eines Würfels hängen und bräuchte nur die Symmetriegruppe eines Würfels und den entsprechenden Zyklenzeiger berechnen.

Die bisherigen Beispiele sind nur scheinbar pure *Spielerei*: Anwendung finden diese Verfahren beispielsweise in der Chemie: Dort betrachtet man Strukturisomere, das sind Moleküle mit gleicher Summenformel (d. h. die Anzahlen der gleichartigen Atome in einem Molekül) aber unterschiedlicher geometrischer Struktur der Verknüpfungen zwischen den Atomen. Mit Hilfe solcher Methoden ist es möglich die Anzahl der Alkane (Summenformel C_nH_{2n+2}) bestehend aus 100 oder gar 1000 C-Atomen innerhalb kürzester Zeit zu bestimmen.[1]

Für die, die noch immer nicht überzeugt von der Nützlichkeit von Polynomen sind, haben wir noch ein weiteres Beispiel aus der Compileroptimierung. Schreibt man ein Computerprogramm in einer Programmiersprache wie beispielsweise C++ so hat der Compiler eine ganze Reihe von *Programmtransformationen* zur Auswahl, die zum selben Ergebnis führen, aber unter Umständen weniger Speicher benötigen bzw. schlichtweg schneller ausgeführt werden. Damit eine geeignete Programmtransformation ausgewählt werden kann, muss der Compiler manchmal wissen, wie oft bestimmte Programmteile aufgerufen werden. Betrachten wir hierzu ein Beispiel: Wie oft wird `f1()` in

```
for i := max(0, N - M) ... N - M + 3
  for j := 0 ... N - 2i
      f1()
```

aufgerufen? Die Antwort ist natürlich von N und M abhängig. Visualisieren können wir die Aufrufe indem wir in einem zweidimensionalen Koordinatensystem alle Punkte (i, j) einzeichnen, wo ein Aufruf stattfindet. Diese Gitterpunkte können wir nun auch durch Ungleichungen beschreiben

$$\begin{aligned}
i \geq 0 &\iff 1 \cdot i + 0 \cdot j \geq 0 \cdot N + 0 \cdot M \\
i \geq N - M &\iff 1 \cdot i + 0 \cdot j \geq 1 \cdot N - 1 \cdot M \\
i \leq N - M + 3 &\iff -1 \cdot i + 0 \cdot j \geq -1 \cdot N + 1 \cdot M - 3 \\
j \geq 0 &\iff 0 \cdot i + 1 \cdot j \geq 0 \cdot N + 0 \cdot M \\
j \leq N - 2i &\iff -2 \cdot i - 1 \cdot j \geq -1 \cdot N + 0 \cdot M.
\end{aligned}$$

Die gesuchte Anzahl an Funktionsaufrufen entspricht also der Anzahl der ganzzahligen Gitterpunkte im durch die obigen Ungleichungen beschriebenen *Polytop* (Stichwort: Modellierung

[1] Unter `http://www.wm.uni-bayreuth.de/index.php?id=231` befindet sich eine Tabelle mit der Anzahl der Isomere der Alkane aus bis zu 100 C-Atomen. Im PDF unter `http://www.wm.uni-bayreuth.de/fileadmin/Sascha/Publikationen2/Strukturisomere_der_Alkane.pdf` wurde versucht ein mögliches Vorgehen vollständig und auf dem Niveau von Oberstufenschülern zu beschreiben.

mit ganzzahligen linearen Programmen[2]). Eine etwas andere Schreibweise lautet:

$$P_{\binom{N}{M}} = \left\{ \binom{i}{j} \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \binom{i}{j} \geq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \binom{N}{M} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Stecken wir dieses Polytop in eine Implementierung des parametrischen Barvinok-Algorithmus, so erhalten wir auf Knopfdruck die Antwort

$$\#P_{\binom{N}{M}} = \begin{cases} -4N + 8M - 8 & : M \leq N \leq 2M - 6, \\ MN - 2N - M^2 + 6M - 8 & : N \leq M \leq N + 3 \leq 2M - 9, \\ \frac{N^2}{4} + N + 1 - \frac{1}{2}\left\{\frac{N}{2}\right\} & : 0 \leq N \leq M \leq \frac{N}{2} + 3, \\ \frac{N^2}{4} - MN - N + M^2 + 2M + 1 - \frac{1}{2}\left\{\frac{N}{2}\right\} & : M \leq N \leq 2M \leq N + 6 \end{cases}$$

mit $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ für $x \in \mathbb{N}$. Die theoretische Grundlage für diesen Algorithmus bilden tiefliegende Sätze aus der „Algebraischen Geometrie“. Ein *Anwender* müsste die ganzen Details allerdings nicht verstehen, um *einfach* nur die Anzahl der Funktionsaufrufe, mit der entsprechenden Software, auszurechnen. Erstaunlich, dass Computer bei sehr allgemeinen Fällen immer automatisch Formeln ausrechnen können.

Aufgabe 4:

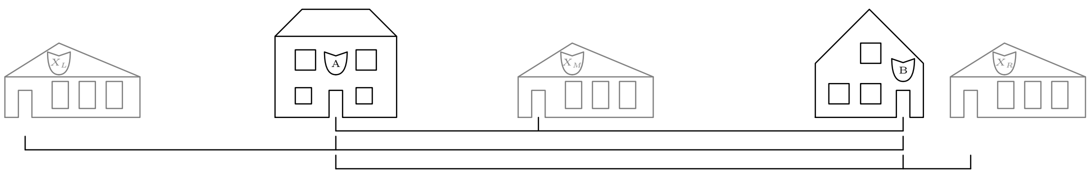


Abbildung 3: Optionen (graue Häuser) bei nur zwei Häusern.

Betrachten wir zunächst ein einfacheres Problem mit nur zwei zu besuchenden Häusern A und B, wobei wir annehmen, dass A links von B liegt. Sucht sich der Postbote nun ein Depot am Standort X_M zwischen A und B, so ergibt sich die Summe seiner zwei Wege zu

$$|AX_M| + |X_M B| = |AB|\,,$$

wobei $|P_1P_2|$ die Länge des Weges von P_1 nach P_2 bezeichnet. Sucht er sich ein Depot an Standort X_L links von A (siehe Abbildung 3), so gilt für die Summe der beiden zurückzulegenden Wege

$$|X_L A| + |X_L B| = |X_L A| + (|X_L A| + |AB|) > |AB|.$$

Entsprechend gilt für einen Standort X_R rechts von B:

$$|AX_R| + |BX_R| = (|AB| + |BX_R|) + |BX_R| > |AB|.$$

Sucht sich der Postbote also ein Depot irgendwo zwischen A und B (Endpunkte A und B inbegriffen) so beträgt die Länge der beiden Wege unabhängig von der genauen Position genau $|AB|$. Sucht er sich ein Depot außerhalb dieses Intervalls, so ist die Länge der beiden Wege größer als $|AB|$.

Teilen wir 8 von den 9 Wegen zu den unterschiedlichen Häusern wie folgt in vier Paare auf: (A, I), (B, H), (C, G), (D, F). Nun können wir schließen, dass die Summe der beiden Wege des Postboten zu Haus A und Haus I mindestens $|AI|$ beträgt. Entsprechend betragen die Summen der beiden Weglängen in den anderen drei Paaren mindestens $|BH|$, $|CG|$, bzw. $|DF|$. Insgesamt erhalten wir eine untere Schranke von

$$|AI| + |BH| + |CG| + |DF|.$$

[2]siehe `http://www.wm.uni-bayreuth.de/index.php?id=optlabor`

Legt der Postbote sein Depot nun in Haus E, also $X = E$, so erreicht die Summe aller neun Wege genau diese untere unvermeidbare Schranke.

$$\begin{aligned} & |XA| + |XB| + |XC| + |XD| + |XE| + |XF| + |XG| + |XH| + |XI| \\ = & (|AX| + |XI|) + (|BX| + |XH) + (|CX| + |XG) + (|DX| + |XF) + |XE| \\ = & |AI| + |BH| + |CG| + |DF| + \underbrace{|EE|}_{=0}. \end{aligned}$$

(E liegt zwischen A und I, zwischen B und H, zwischen C und G, zwischen D und F.)