Lösungen Klassenstufen 5–6

Vorbemerkung: Im Folgenden geben wir jeweils eine mögliche Lösung zu den Wettbewerbsaufgaben des 6. Bayreuther Tags der Mathematik an. Natürlich kann es auch andere, evtl. sogar elegantere, Lösungswege geben. Über Hinweise zu alternativen Lösungswegen würden wir uns sehr freuen und auch bei Unklarheiten oder Fehlern möchten wir gerne davon hören; z. B. per Email an `sascha.kurz@uni-bayreuth.de`.

Aufgabe 1:

Falls es sechs oder mehr graue Mäuse geben würde, so könnte man bei acht ausgewählten Mäusen sechs graue und zwei weiße Mäuse erwischen. Da man hier weniger als drei weiße Mäuse herausgegriffen hätte, kann das nicht richtig sein. Es gibt also höchstens fünf graue Mäuse. Egal welche acht Mäuse man auswählt, wenn höchstens fünf grau sind, müssen mindestens drei weiß sein.

Aufgabe 2:

Aus den ersten 3 Waagen lesen wir ab

$$\begin{aligned} 1 \text{ Birne} &= 8 \text{ Kirschen} \\ 2 \text{ Bananen} &= 6 \text{ Kirschen} \\ 4 \text{ Bananen} &= 1 \text{ Apfel} \end{aligned}$$

(Hierbei haben wir einzelne Kirschen und nicht Paare von Kirschen gezählt. Möchte man Paare von Kirschen zählen, so braucht man nur alle angegebenen Anzahlen von Kirschen durch zwei zu teilen.) Nehmen wir die erste Gleichung mit 3, die zweite mit 4 und die dritte Gleichung mit 2 mal, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 3 \text{ Birnen} &= 24 \text{ Kirschen} \\ 8 \text{ Bananen} &= 24 \text{ Kirschen} \\ 8 \text{ Bananen} &= 2 \text{ Äpfel} \end{aligned}$$

Zusammensetzen der Gleichungen ergibt, dass (in diesem Beispiel) zwei Äpfel genauso viel wiegen wie drei Birnen.

Aufgabe 3:

Nachdem man den aktuell zweiten überholt hat, ist man Zweiter. Dass anschließend der Drittplatzierte und der Viertplatzierte die Plätze tauschen, ändert daran nichts mehr.

Aufgabe 4:

Teilt man die „Dinge“ z. B. so:

$$[1800, 600], [900, 900, 500, 300]$$

auf, so wiegt der erste Rucksack 2400 g und der zweite Rucksack 2600 g, was zu einer Differenz von 200 g führt.

Wir stellen fest, dass alle Gewichte bis auf eines durch 300 teilbar sind. Also ist auch das Gesamtgewicht des einen Rucksacks durch 300 g teilbar. Hat dieser Rucksack nun ein Gewicht von 2400 g oder weniger, so muss der andere Rucksack ein Gewicht von $5000\,\text{g} - 2400\,\text{g} = 2600\,\text{g}$ oder mehr besitzen. In diesem Fall beträgt die Differenz also mindestens 200 g. Falls der Rucksack mit dem durch 300 teilbaren Gesamtgewicht eine Masse von 2700 g oder mehr besitzt, so wiegt der andere Rucksack höchstens 2300 g und die Differenz beträgt mindestens 400 g.

Man könnte natürlich auch, halbwegs geschickt, die Fälle durchgehen, welche Aufteilungen möglich sind, und dabei feststellen, dass es keine *fairere* Aufteilung gibt.

Aufgabe 5:

Der Hund legt 1000 m, die Katze 1000 m − 100 m = 900 m zurück. Da die Katze auf 1000 m gegenüber der Maus 150 m Vorsprung hätte, so hat sie nach Dreisatz auf 900 m gegenüber der Maus $\frac{150}{1000} \cdot 900\,\text{m} = 135\,\text{m}$ Vorsprung. Der Hund hat also insgesamt $100\,\text{m} + 135\,\text{m} = 235\,\text{m}$ Vorsprung gegenüber der Maus.

Aufgabe 6:

(a) Es gibt genau 6-Rechecke (mit ganzzahligen Seitenlängen), die aus genau 12 Kästchen bestehen:

$$1 \times 12, 2 \times 6, 3 \times 4, 4 \times 3, 6 \times 2, 12 \times 1.$$

(b)