Lösungen Klassenstufen 7–8

Vorbemerkung: Im Folgenden geben wir jeweils eine mögliche Lösung zu den Wettbewerbsaufgaben des 6. Bayreuther Tags der Mathematik an. Natürlich kann es auch andere, evtl. sogar elegantere, Lösungswege geben. Über Hinweise zu alternativen Lösungswegen würden wir uns sehr freuen und auch bei Unklarheiten oder Fehlern möchten wir gerne davon hören; z. B. per Email an `sascha.kurz@uni-bayreuth.de`. Wir haben es uns nicht nehmen lassen bei manchen Aufgaben noch einige Bemerkungen zum Hintergrund und den Verknüpfungen zur Universitätsmathematik anzugeben. Diese können teilweise schwieriger nachzuvollziehen sein – klar, es wird ja auch Universitätsstoff angedeutet. Wir hoffen, dass sich anfängliches Zurückschrecken in Erstaunen darüber wandeln wird, wie mächtig mathematische Methoden sein können und wozu sie eingesetzt werden können.

Aufgabe 1:

Der Typ dieses Rätsel ist sehr klassisch und vielen in folgender, oder einer ähnlichen, Variante bekannt:

> „Alkuin, der Abt des Klosters St. Martin in Tours, war der Lehrer und Ratgeber Karls des Großen. Er hat ein Buch mit Rechen- und Denkaufgaben verfasst und erzählt darin diese Geschichte:
> Am Ufer eines Flusses steht ein Mann mit einem Wolf, einer Ziege und einem Krautkopf. Er findet ein winziges Boot, worin außer ihm selbst als Ruderer immer nur eines der drei mitgeführten Dinge Platz hat. Der Mann steht nun also nicht nur am Ufer, sondern auch vor einem großen Problem: Den Wolf und die Ziege kann er nicht allein lassen, sonst zerreißt der eine die andere. Die Ziege und der Krautkopf dürfen aber auch nicht zusammen an einem Ufer bleiben, sonst frisst die Ziege das Gemüse.
> Was tun?“

Derartige Rätsel gibt es viele. Alle haben eine Gemeinsamkeit: Man kann sie systematisch mit Hilfe von Graphentheorie bzw. Algorithmen für Kürzeste-Wege-Probleme lösen.

Abstrakt gesehen, kann man die Situationen nach einer Flussüberquerung dadurch beschreiben, indem man angibt, wer sich auf der linken und wer sich auf der rechten Seite des Flusses befindet. Kürzen wir unsere vier Protagonisten mit den Buchstaben M, W, Z und K ab, so lässt sich der *Startzustand* durch $KMWZ/$ und der gewünschte *Zielzustand* durch $/KMWZ$ beschreiben. Insgesamt gibt es $2^4 = 16$ mögliche *Zustände*, jeder der vier Protagonisten befindet sich auf einer der beiden Seiten des Flusses. Die Position des Bootes müssen wir in unserem Fall nicht extra beschreiben, weil es sich immer dort befindet, wo M gerade ist.

Von diesen 16 Zuständen sind aber die folgenden sechs verboten: WZ/KM, KM/WZ, KWZ/M, M/KWZ, KZ/MW, MW/KZ, damit nichts und niemand aufgefressen wird. Die restlichen 10 Zustände sind in friedlicher Koexistenz möglich. Wenn man in einem bestimmten Zustand ist, gibt es meist mehrere Möglichkeiten in einen neuen Zustand zu kommen. Im Startzustand $KMWZ/$ kann der Mann mit der Ziege, dem Wolf oder dem Kohlkopf auf die andere Seite fahren, was durch die Zustände KW/MZ, KZ/MW, bzw. WZ/KM beschrieben werden würde. Hier ist allerdings, wie oben beschrieben, nur der erste Zustand erreichbar.

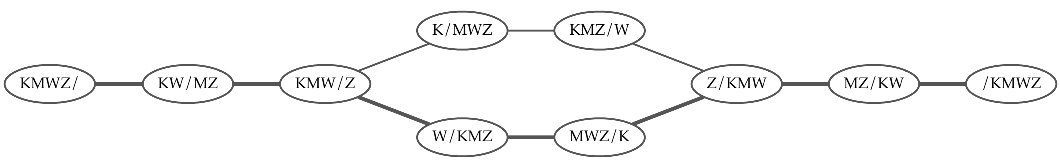


Abbildung 1: Objekte links des Schrägstrichs haben den Fluss noch nicht überquert. Der kürzeste Weg führt entlang der fetten Kanten.

Zeichnet man für jeden möglichen Zustand einen Kreis und verbindet jeden Zustand mit all seinen möglichen Folgezuständen durch eine Kante, so erhält man den in Abbildung 1 dargestellten *Graphen* (die Zustände sind die *Knoten*).

In der Sprache der Mathematik sucht man nun in einem gegebenen Graphen einen (kürzesten Weg) von einem Startknoten (Startzustand) zu einem Zielknoten (Zielzustand). Hierfür gibt es sehr schnelle Algorithmen, z. B. den Dijkstra-Algorithmus. Die fetten gedruckten Kanten in Abbildung 1 markieren den kürzesten solchen Weg im Mann-Kohlkopf-Wolf-Ziege-Rätsel.

In unserem Rätsel kann man, wenn man systematisch vorgehen möchte, genauso wie eben beschrieben vorgehen. Zunächst muss man also den Graph *modellieren.* Wir haben wieder vier Protagonisten, die sich links und rechts der Brücke befinden können. Zusätzlich müssen wir noch beschreiben, wo sich die Taschenlampe befindet. (Es ist nur wichtig, ob sich die Taschenlampe gerade auf der linken Seite der Brücke befindet, oder auf der rechten Seite der Brücke. Wer sie getragen hat, spielt keine Rolle.) Wir erhalten also $2^5 = 32$ mögliche Zustände. (Die Zustände $T/ABCD$ und $ABCD/T$ können allerdings nicht erreicht werden, da die Taschenlampe immer von jemanden getragen werden muss.) Der Startzustand wird durch $ABCDT/$ und der Zielzustand durch $/ABCDT$ beschrieben. Die Kanten müsste man so einzeichnen, dass die Taschenlampe immer und exakt einer oder zwei Konfirmanden die Seite wechseln. Die benötigte Zeit können wir berücksichtigen, indem wir sie an jede Kante mit dran schreiben. Der Wechsel von $ABCDT/$ zu CD/ABT dauert z. B. 25 Minuten, weil immer beide gleich schnell laufen müssen, um das Licht der Taschenlampe nutzen zu können.

Die Länge eines Weges ist dann hier durch die Summe der Zahlen auf den verwendeten Kanten gegeben. Auch hier suchen wir wieder einen kürzesten Weg. Wenn der kürzeste Weg eine Länge von maximal 60 Minuten hat, geht es, ansonsten nicht.

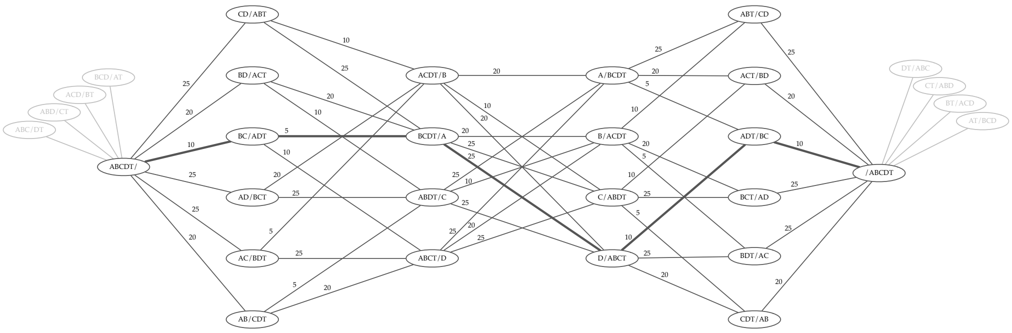


Abbildung 2: Objekte links des Schrägstrichs haben die Brücke noch nicht überquert. Der kürzeste Weg führt entlang der fetten Kanten.

In Abbildung 2 haben wir versucht, den zugehörigen Graphen so übersichtlich wie möglich darzustellen. Eine weitere Möglichkeit ist, diese Information in einer Distanzmatrix, siehe Tabelle 1 darzustellen, d. h. für je zwei Knoten tragen wir den Abstand zwischen diesen beiden Knoten ein. Falls es zwischen zwei Knoten keine Kante gibt, markieren wir dies durch -. Da die Abstände in unserem Fall *symmetrisch* sind, reicht es, das rechte obere Dreieck der Tabelle ausfüllen.

Den zugehörigen kürzesten Weg, mit Länge 60, haben wir in Abbildung 2 wiederum durch fett markierte Kanten markiert. Ausgeschrieben lautet er:

$$ABCDT/ \xrightarrow{10} BC/ADT \xrightarrow{5} BCDT/A \xrightarrow{25} D/ABCT \xrightarrow{10} ADT/BC \xrightarrow{10} /ABCDT$$

Natürlich kann man dieses kleine Beispiel auch etwas *unsystematischer* bzw. ohne Verwendung von Graphentheorie lösen. Bastian und Christina sollten die Brücke insgesamt exakt ein Mal überqueren, da ein dreimaliges Überqueren bereits mindestens 60 Minuten dauern würde. (Die Anzahl der Überquerungen muss für alle Konfirmanden eine ungerade Zahl sein, wie man sich

	ABCDT/	AB/CDT	AC/BDT	AD/BCT	BC/ADT	BD/ACT	CD/ABT	BCDT/A	ACDT/B	ABDT/C	ABCT/D	A/BCDT	B/ACDT	C/ABDT	D/ABCT	ABT/CD	ACT/BD	ADT/BC	BCT/AD	BDT/AC	CDT/AB	/ABCDT
ABCDT/	0	20	25	25	20	20	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AB/CDT		0	-	-	-	-	-	-	-	5	20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AC/BDT			0	-	-	-	-	-	5	-	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AD/BCT				0	-	-	-	-	20	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BC/ADT					0	-	-	5	-	-	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BD/ACT						0	-	20	-	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CD/ABT							0	25	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BCDT/A								0	-	-	-	-	20	25	25	-	-	-	-	-	-	-
ACDT/B									0	-	-	20	-	10	20	-	-	-	-	-	-	-
ABDT/C										0	-	25	10	-	25	-	-	-	-	-	-	-
ABCT/D											0	25	20	25	-	-	-	-	-	-	-	-
A/BCDT												0	-	-	-	25	20	5	-	-	-	-
B/ACDT													0	-	-	10	-	-	20	5	-	-
C/ABDT														0	-	-	10	-	25	-	5	-
D/ABCT															0	-	-	10	-	25	20	-
ABT/CD																0	-	-	-	-	-	25
ACT/BD																	0	-	-	-	-	20
ADT/BC																		0	-	-	-	10
BCT/AD																			0	-	-	25
BDT/AC																				0	-	25
CDT/AC																					0	20
/ABCDT																						0

Tabelle 1: Distanzmatrix.

leicht überlegen kann.) Auch sollten Bastian und Christina möglichst gemeinsam die Brücke überqueren, da sie sonst Anna bzw. Dennis ziemlich *ausbremsen* würden. In der ersten Runde geht dies dann allerdings nicht. Also könnte man mit Anna und Dennis anfangen. Einer der beiden muss zurücklaufen, da sich die Taschenlampe nun auf der rechten Seite der Brücke befindet. Da Dennis der schnellere ist, versuchen wir es mit ihm. Nun könnten Bastian und Christina die Brücke gemeinsam überqueren. Die schnellste Person auf der rechten Seite, in diesem Fall Anna, bringt die Taschenlampe zurück und es müssen nur noch Anna und Dennis die Brücke überqueren. Nun prüft man noch nach, dass diese Lösung wirklich mit 60 Minuten auskommt.

Durch Angabe dieser Lösung weiß man nun, dass es in 60 Minuten möglich ist. Man weiß aber nicht – jedenfalls nicht ohne weitere Überlegungen – dass es nicht in 30 Minuten oder 40 Minuten ebenfalls geht. Eine solche *untere* Schranke kann man z. B. durch folgende Überlegung bekommen: Egal wer die Brücke überquert, man braucht mindestens fünf Überquerungen der Brücke, damit am Ende alle vier auf der rechten Seite sind. Anna, Bastian und Christina müssen die Brücke alle mindestens ein Mal überqueren. Dafür werden in jedem Fall mindestens $25 + 10 = 35$ Minuten benötigt. Werden die drei restlichen Überquerungen nur von Dennis durchgeführt, so werden dafür noch mal mindestens $3 \cdot 5 = 15$ Minuten benötigt, so dass es definitiv nicht schneller als in 50 Minuten gehen kann. (Verwendet man einen kürzeste-Wege-Algorithmus, so stellt man fest, dass es definitiv nicht schneller als in 60 Minuten gehen kann. Argumentativ kann man dies zwar auch, dafür aber nur mit einiger Mühe begründen.)

Modellierung mit Hilfe von Graphen und die Verwendung von Kürzeste-Wege-Algorithmen kann also helfen derartige Rätsel systematisch zu lösen. Eingesetzt werden diese Algorithmen aber vor allem bei praktischen Problemen. Das Navigationsgerät im Auto berechnet quasi auf Knopfdruck kürzeste Wege in einem Graphen mit ca. 5 Millionen Knoten und 6 Millionen Kanten. Falls Ihr mehr wissen wollt, fragt doch einfach mal Euren Mathelehrer, ob er nicht einen der einfacheren Kürzeste-Wege-Algorithmen, wie beispielsweise den Dijkstra-Algorithmus, im Unterricht behandeln kann. (Der ist nämlich gar nicht so schwer.) Für große Graphen und komplizierte Anwendungsprobleme braucht man allerdings auch kompliziertere Algorithmen wie beispielsweise den $A^\star$-Algorithmus. An der Universität Bayreuth kann man diese Algorithmen zum Beispiel in der Vorlesung „Graphen- und Netzwerkalgorithmen“ erlernen.

Aufgabe 2:

(a) Wir stellen zunächst fest, dass man die Optionen Leihen und Kaufen nicht mischen sollte, da man ansonsten auf das anfängliche Leihen verzichten könnte. Wenn man also kauft, so sollte man zu Beginn kaufen und nicht mehr leihen. t Tage zu leihen kostet $20t$ € und der sofortige Kauf der Skier kostet 100 €. Lösen wir $20t = 100$, so erhalten wir $t = 5$ und folgern, dass für maximal 5 Tage leihen günstiger bzw. höchstens genauso teuer wie kaufen und ab fünf Tagen kaufen nicht teuerer als leihen ist.

(b) Nach Aufgabenteil (a) können wir die Kosten der im Nachhinein optimalen Entscheidung leicht bestimmen. Anhand einer Tabelle errechnen wir den Ärgerfaktor in allen sieben Fällen.

Anzahl Tage	1	2	3	4	5	6	7
Kosten sofort kaufen	100	100	100	100	100	100	100
Kosten der optimalen Entscheidung	20	40	60	80	100	100	100
Ärgerfaktor	5	2,5	$1{,}\overline{6}$	1,25	1	1	1

Der maximale Ärgerfaktor beträgt also 5.

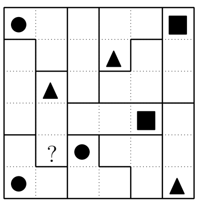
(c) Auch hier berechnen wir den Ärgerfaktor anhand einer Tabelle für alle sieben möglichen Fälle.

Anzahl Tage	1	2	3	4	5	6	7
Kosten von Michaels Strategie	20	40	140	140	140	140	140
Kosten der optimalen Entscheidung	20	40	60	80	100	100	100
Ärgerfaktor	1	1	$2{,}\overline{3}$	1,75	1,4	1,4	1,4

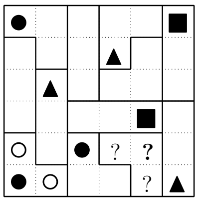
Der maximale Ärgerfaktor beträgt also $2{,}\overline{3}$.

Die Strategie aus Aufgabenteil (c) ist nicht die optimale Strategie, um den Ärgerfaktor so gleich wie möglich zu halten. Leiht man die ersten vier Tage (sofern man überhaupt noch weiter fahren möchte) und kauft am fünften Tag, so beträgt der Ärgerfaktor maximal 1,8. Allgemein handelt es sich hier um ein Optimierungsproblem unter Unsicherheit. Solche Probleme werden in Veranstaltungen wie der „Online-Optimierung" im Mathematikstudium behandelt. Der Ärgerfaktor heisst dann Kompetivitätsfaktor und man kann ihn in diesem Beispiel analytisch bestimmen (auch wenn die vorkommenden Zahlen durch *Buchstaben* bzw. Parameter ersetzt werden). Die sogenannte kompetitive Analyse ist ein geeignetes Analyseinstrument zur Bewertung von Strategien (oder Algorithmen) bei unsicherer Zukunft ohne stochastische Informationen. Kennt man die Wahrscheinlichkeitsverteilung der unsicheren Ereignisse in der Zukunft, kann man andere Methoden, wie sie beispielsweise in der „Stochastischen Linearen Optimierung" behandelt werden, verwenden.

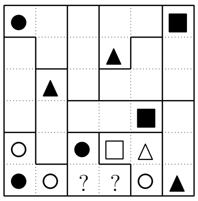
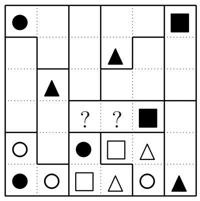
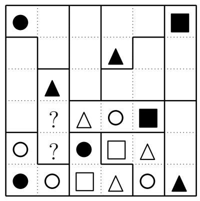
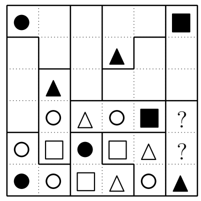
Aufgabe 3:

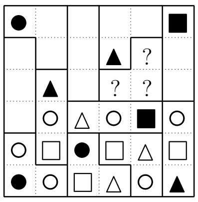


In dem Feld mit dem Fragezeichen kann entweder ein Quadrat oder ein Dreieck stehen. In keinem Fall kann das Gebiet links unten davon mit unterschiedlichen Symbolen ausgefüllt werden.

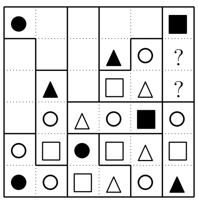
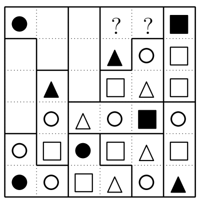


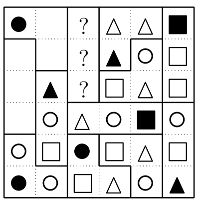
An das Gebiet mit den Fragezeichen grenzt jedes der drei Symbole an, es müssen also unterschiedliche Symbole verwendet werden. Wäre das fett gedruckte Fragezeichen ein Kreis, so müsste das Feld eins nach links und eins nach unten ebenfalls einen Kreis enthalten, was nicht sein kann, da das entsprechende Gebiet mit drei unterschiedlichen Symbolen gefüllt werden muss. Somit muss das fett gedruckte Fragezeichen durch ein Dreieck ersetzt werden und die anderen beiden Symbole des Gebietes ergeben sich wie abgebildet. Wir füllen nun der Reihe nach die Gebiete mit den Fragezeichen auf eindeutige Art und Weise aus.

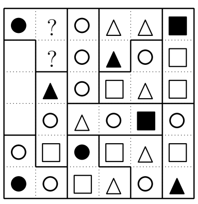
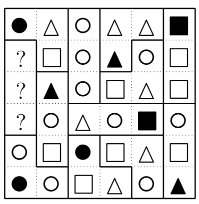
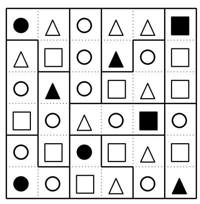


Da an das durch Fragezeichen markierte Gebiet bereits alle drei Symbole angrenzen, muss es drei unterschiedliche Symbole enthalten, was nur auf eine Art und Weise möglich ist.



Da in dem durch Fragezeichen markiertem Gebiet kein einziges Feld ein Dreieck beinhalten kann, muss dieses Gebiet durch lauter gleiche Symbole ausgefüllt werden. Da es zu Dreiecken und einem Quadrat benachbart ist, bleiben nur Kreise übrig.

Aufgabe 4:

(a) Es stehen noch 14 Spiele aus in denen jeweils 2 Punkte zu vergeben sind, so dass es insgesamt noch $2 \cdot 14 = 28$ zu vergebende Punkte gibt. HaSpo Bayreuth hat noch vier zu absolvierende Spiele in denen das Team insgesamt maximal $4 \cdot 2 = 8$ Punkte erreichen kann.

(b,c) Beide Ereignisse sind sogar gleichzeitig möglich. Gehen die Spiele beispielsweise wie folgt aus:

Datum	Heimmannschaft	Gastmannschaft	Ergebnis
16.07.2011	SG DJK Rimpar	TuS Fürstenfbr. II	11:11
17.07.2011	HBLZ Großwallstadt	SV 08 Auerbach	11:11
23.07.2011	SG DJK Rimpar	HBLZ Großwallstadt	20:10
24.07.2011	TSV Rödelsee	SV 08 Auerbach	10:20
24.07.2011	TuS Fürstenfbr. II	HaSpo Bayreuth	10:20
30.07.2011	TSV Rödelsee	SG DJK Rimpar	20:10
30.07.2011	HBLZ Großwallstadt	TuS Fürstenfbr. II	11:11
31.07.2011	SV 08 Auerbach	HaSpo Bayreuth	10:20
06.08.2011	SG DJK Rimpar	HaSpo Bayreuth	10:20
07.08.2011	TSV Rödelsee	HBLZ Großwallstadt	10:20
07.08.2011	TuS Fürstenfbr. II	SV 08 Auerbach	10:20
13.08.2011	SV 08 Auerbach	SG DJK Rimpar	20:10
13.08.2011	TuS Fürstenfbr. II	TSV Rödelsee	20:10
14.08.2011	HBLZ Großwallstadt	HaSpo Bayreuth	10:20

so ergibt sich (bei geeigneten Torverhältnissen) folgende Tabelle:

Platz	Verein	Spiele	Punkte
1	HaSpo Bayreuth	10	10
2	SG DJK Rimpar	10	10
3	HBLZ Großwallstadt	10	10
4	TuS Fürstenfbr. II	10	10
5	SV 08 Auerbach	10	10
6	TSV Rödelsee	10	10

HaSpo Bayreuth wird also Meister und der TSV Rödelsee kommt nur auf den letzten Platz.

(d) Enden die ersten beiden Spiele mit Siegen der jeweiligen Heimmannschaft, so lautet die Zwischentabelle:

Platz	Verein	Spiele	Punkte
1	SG DJK Rimpar	6	9
2	TSV Rödelsee	6	8
3	HBLZ Großwallstadt	6	8
4	TuS Fürstenfbr. II	6	6
5	SV 08 Auerbach	6	3
6	HaSpo Bayreuth	6	2

Ohne Einschränkung können wir davon ausgehen, dass HaSpo Bayreuth alle seine Spiele gewinnt und somit insgesamt 10 Punkte erreicht. Damit HaSpo Bayreuth auch wirklich Meister wird, darf SG DJK Rimpar in den austehenden Spielen nicht mehr als einen Punkt, TSV Rödelsee nicht mehr als zwei Punkte und HBLZ Großwallstadt nicht mehr als zwei Punkte erzielen. Insgesamt dürfen die drei Teams auf den vorderen drei Plätzen also nicht mehr als fünf Punkte erzielen. Da aber in den drei noch ausstehenden Partien SG DJK Rimpar gegen HBLZ Großwallstadt, TSV Rödelsee gegen SG DJK Rimpar und TSV Rödelsee gegen HBLZ Großwallstadt noch insgesamt sechs Punkte unter diesen drei Teams aufzuteilen sind, ist es unmöglich, dass HaSpo Bayreuth noch Meister werden kann.

Wir möchten erwähnen, dass man die Frage, wer im Handball theoretisch noch Meister werden kann, auf ein vollkommen anderes Problem zurückführen kann. Nämlich auf die Frage nach der maximalen Flussmenge in einem gerichteten Netzwerk dessen Kanten Kapazitäten haben, sogenannte *Netzwerkflussprobleme*.

Um das Netzwerk zu konstruieren, geht man zunächst davon aus, dass die Mannschaft M, von der man wissen möchte, ob sie noch Meister werden kann, all ihre Spiele gewinnt. Bei den restlichen Mannschaften rechnet man aus wie viele Punkte diese noch maximal erzielen dürfen (also bis zum Punktgleichstand mit M). Nun führt man für jedes noch ausstehende Spiel (ohne Beteiligung von M, da wir bereits davon ausgehen, dass M diese gewinnt) und jede der Mannschaften außer M einen Knoten ein. Ausgehend von einer Quelle münden in jedem Spielknoten genau eine Kante mit Kapazität zwei (für die zwei zu verteilenden Punkte in einem Spiel). Aus dem Spiel heraus gehen zwei Kanten mit Kapazität zwei zu den beiden beteiligten Mannschaften. Von jedem Mannschaftsknoten führt eine Kante, deren Kapazität durch die Maximalzahl an Punkten die die Mannschaft noch erzielen darf gegeben ist, zu einer Senke. Für Aufgabenteil (b) ergibt sich das Netzwerk in Abbildung 3.

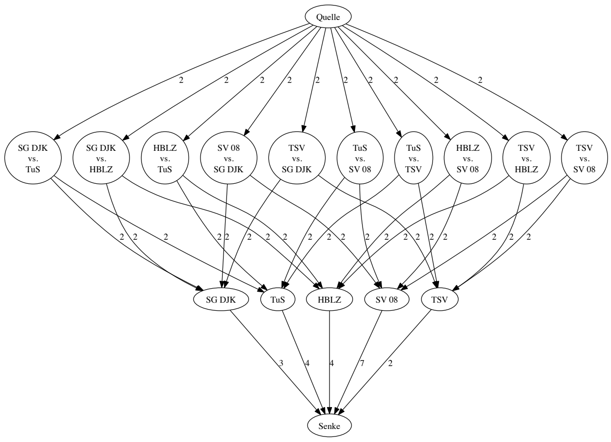


Abbildung 3: Das Flussnetzwerk zur Fragestellung „Kann HaSpo noch Meister werden?“

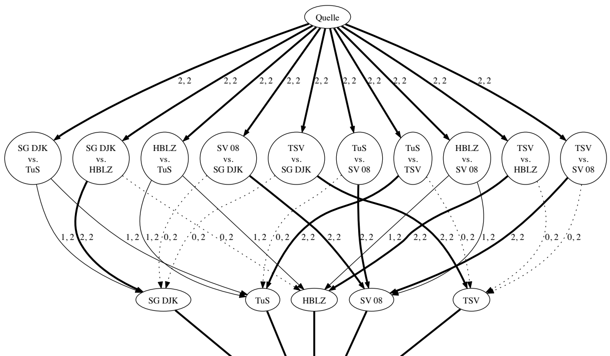


Abbildung 4: Der zu (b) gehörige Fluss; die Zahlen an den Kanten geben an, wieviele Punkte auf ihr „fließen“ (vor dem Komma) bzw. wieviele maximal darauf fließen könnten (nach dem Komma). Fließen keine Punkte auf einer Kante ist diese gepunktet, wird sie voll ausgelastet ist sie fett.

Mannschaft M kann genau dann noch Meister werden, wenn es einen (ganzzahligen) Fluss von der Quelle zur Senke gibt, dessen Flusswert den insgesamt zu vergebenden Punkten in den übrigen Spielen entspricht. Der zugehörige Fluss zu Aufgabenteil (b) mit einem Flusswert von 20 ist in Abbildung 4 zu sehen.

In Aufgabenteil (d) stellten wir fest, dass es in dieser Konstellation HaSpo Bayreuth nicht mehr möglich ist, Meister zu werden. Mit Hilfe von Flussberechnungen kann man ein einfach zu überprüfendes Argument erhalten, warum das so ist. Dazu teilen wir die Knoten des Netzwerkes in zwei Mengen auf, die einen färben wir grau, die anderen bleiben weiß. In den Abbildungen 5 und 6 sind zwei solche Aufteilungen zu sehen.

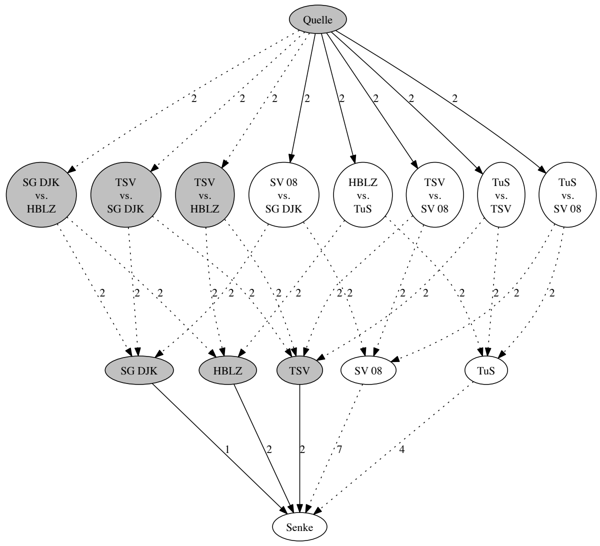


Abbildung 5: Eine Aufteilung der Knoten; die aus der grauen Knotenmenge ausgehenden Kanten sind durchgezogen.

Um von der Quelle zur Senke zu fließen, muss der Fluss von der einen Menge in die andere fließen. Addieren wir die Kapazitäten aller Kanten die von der einen Menge in die andere gehen, so erhalten wir eine obere Schranke für mögliche Flusswerte. Bei beiden Aufteilungen ergibt sich als maximaler Flusswert 15.

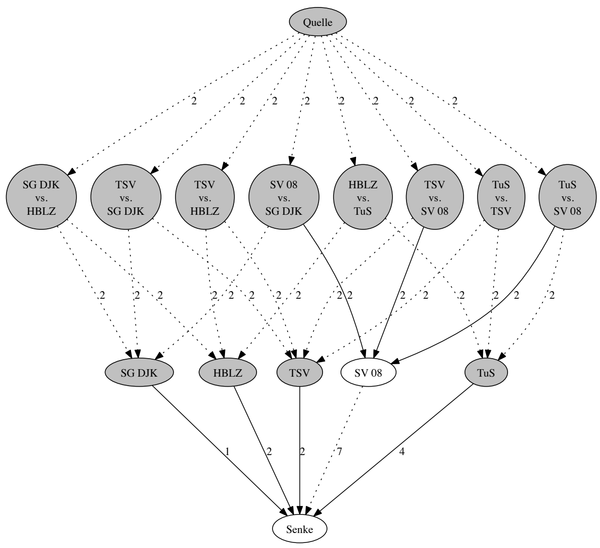


Abbildung 6: Eine weitere Aufteilungen der Knoten, bei der ebenfalls kein Fluss mit Wert 16 möglich ist.

Die genauen Details zu diesen Flussproblemen inkl. schnellen Algorithmen (Stichwort *Ford-Fulkerson*) zur Lösung, lernt man im Mathematikstudium beispielsweise innerhalb der Vorlesung „Graphen- und Netzwerkalgorithmen“.