Lösungen Klassenstufen 9–10

Vorbemerkung: Im Folgenden geben wir jeweils eine mögliche Lösung zu den Wettbewerbsaufgaben des 6. Bayreuther Tags der Mathematik an. Natürlich kann es auch andere, evtl. sogar elegantere, Lösungswege geben. Über Hinweise zu alternativen Lösungswegen würden wir uns sehr freuen und auch bei Unklarheiten oder Fehlern möchten wir gerne davon hören; z. B. per Email an `sascha.kurz@uni-bayreuth.de`. Wir haben es uns nicht nehmen lassen bei manchen Aufgaben noch einige Bemerkungen zum Hintergrund und den Verknüpfungen zur Universitätsmathematik anzugeben. Diese können teilweise schwieriger nachzuvollziehen sein – klar, es wird ja auch Universitätsstoff angedeutet. Wir hoffen, dass sich anfängliches Zurückschrecken in Erstaunen darüber wandeln wird, wie mächtig mathematische Methoden sein können und wozu sie eingesetzt werden können.

Aufgabe 1:

Zunächst wählen wir eine geeignete Einheit, um Beispiele zeichnen zu können. Da die Seitenlängen aller Fliesen Vielfache von 2 dm sind, soll die Seitenlänge eines (quadratischen) Kästchen 2 dm = 20 cm entsprechen. In den vier Teilaufgaben geht es also darum ein 13×13 Quadrat in möglichst wenige $n \times n$-Quadrate zu zerlegen, wobei n eine natürliche Zahl zwischen 1 und 12 ist.

(a) Egal wie wir das 12×12-Quadrat im 13×13-Quadrat (rechtwinklig) platzieren, die entstehenden Lücken können nur mit 1×1-Quadraten gefüllt werden. Benötigt werden genau $13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$ 1×1-Quadrate. Insgesamt werden also 26 Fliesen benötigt. Siehe Abbildung 1.

(b) Egal wie wir das 11×11-Quadrat im 13×13-Quadrat (rechtwinklig) platzieren, die entstehenden Lücken können nur mit 1×1-Quadraten oder 2×2-Quadraten gefüllt werden. Schließt das 11×11-Quadrat nicht in einer der Ecken des 13×13-Quadrates ab, können nur noch 1×1-Quadrate verwendet werden, so dass insgesamt $13^2 - 11^2 = 169 - 121 = 48$ 1×1-Quadrate benötigt würden. Abbildung 2 zeigt aber einen Fliesplan, der mit nur 16-Quadraten auskommt. Wir können also im folgenden davon ausgehen, dass die linke untere Ecke des 11×11-Quadrates mit der linken unteren Ecke des 13×13-Quadrates übereinstimmt (wie in Abbildung 2). Für die übrig gebliebene Fläche benötigen wir mindestens $\frac{13^2-11^2}{2^2} = 12$ zusätzliche Fliesen. Da aber die obere Seitenlänge eine ungerade Zahl ist, können wir nicht nur 2×2-Quadrate verwenden, sondern müssen auch mindestens 1 1×1-Quadrat verwenden. Die theoretische kleinstmögliche Anzahl an Fliesen ergibt sich, wenn wir genau 11 2×2-Fliesen (also genau eine weniger als 12, was nicht ging) und 4 1×1-Fliesen verwenden. Das dies so möglich ist, sieht man in Abbildung 2. Als minimale Anzahl notwendiger Fliesen ergibt sich somit $1 + 11 + 4 = 16$.

(c) In Abbildung 3 ist ein Fliesplan angegeben, der mit einer 10×10-, sechs 3×3-, drei 2×2- und drei 1×1-Fliesen, also insgesamt 13 Fliesen auskommt. Im folgenden wollen wir zeigen, dass es mit 12 oder weniger Fliesen nicht möglich ist. Für die Lücken, die das 10×10-Quadrat übrig lässt können nur 1×1-, 2×2- oder 3×3-Quadrate verwendet werden. Würde man auf die Verwendung von 3×3-Quadraten verzichten, so würde man mindestens $\frac{13^2-10^2}{2^2} = 17{,}25$ zusätzliche Quadrate benötigen, was zu viele wären. Wir können also im Folgenden davon ausgehen, dass die linke untere Ecke des 10×10-Quadrates mit der linken unteren Ecke des 13×13-Quadrates übereinstimmt (wie in Abbildung 3). Wir machen nun eine Fallunterscheidung nach der Anzahl der verwendeten 3×3-Quadrate.

   (i) Falls nicht mehr als fünf 3×3-Quadrate verwendet werden, so benötigt man mindestens 13 Quadrate insgesamt: Bezeichnen wir die Anzahl der verwendeten 3×3-Quadrate mit x, so müssen noch mindestens $\frac{13^2-10^2-x\cdot 3^2}{2^2} = \frac{69-9x}{4}$ weitere Quadrate verwendet werden, so dass sich insgesamt mindestens $1+x+\frac{69-9x}{4} = \frac{73-5x}{4}$ Quadrate ergeben würden. Für $x \le 4$ wären dies mehr als 13, für $x = 5$ genau 12 Quadrate. Schauen wir uns letzteren Fall noch mal genauer an. Nachdem wir das 10×10- und die fünf 3×3-Quadrate platziert haben, bleiben entweder oben oder rechts in jedem Fall ein 1×3-Streifen übrig, der nicht nur mit 2×2-Quadraten ausgefüllt werden kann. Es müssen also 1×1-Quadrate verwendet werden und die kleinste theoretische Möglichkeit sind fünf 2×2- und vier 1×1-Quadrate, was zu insgesamt $1 + 5 + 5 + 4 = 15$ Quadraten führen würde.

(ii) Falls in dem oberen, vom 10×10-Quadrat freigelassenen, 3×13-Rechteck vier 3×3-Quadrate platziert werden, geht es bis auf Verschiebungen des 1×3-Streifens aus 1×1-Quadraten, nur wie in Abbildung 4 dargestellt. (Mehr als vier 3×3-Quadrate kann man nicht im oberen 3×13-Rechteck unterbringen.) Bisher werden also bereits 8 Quadrate verwendet und es bleibt ein 3×10-Rechteck zu fliesen, bei dem man höchstens drei weitere 3×3-Quadrate verwenden kann. Sei nun x die Anzahl der zusätzlichen 3×3-Quadrate ($0 \leq x \leq 3$). Neben diesen x zusätzlichen Quadraten werden noch mindestens $\frac{3 \cdot 10 - x \cdot 3^2}{2^2} = \frac{30-9x}{4}$ weitere Quadrate benötigt. Für $x \leq 2$ würde man also mindestens 13 Quadrate benötigen. Für den Fall $x = 3$ bleibt nur ein 1×3-Streifen übrig, der mit drei 1×1 Quadraten gefüllt werden müsste, so dass sich insgesamt 14 benötigte Quadrate ergeben würden.

(iii) Falls genau sechs 3×3-Quadrate verwendet werden, so bleibt eine Fläche von $13^2 - 10^2 - 6 \cdot 3^2 = 15$ Einheitsquadraten mit 1×1- und 2×2-Quadraten zu überdecken. Da 15 bei Division durch $2^2 = 4$ den Rest drei hat, muss die Anzahl der verwendeten 1×1-Quadrate 3, 7, 11 oder 15 betragen. Die entsprechenden Anzahlen der benötigten 2×2-Quadrate betragen 3, 2, 1 oder 0, so dass sich insgesamt mindestens 13 Quadrate ergeben.

(d) Wir nummerieren die elf verwendeten Fliesen von 1 bis 11 durch und führen Variablen x_i für ihre Seitenlängen ein, siehe Abbildung 5. Gehen wir zeilen- und spaltenweise durch, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x_2 + x_1 &= 13\\
x_7 + x_6 + x_{11} + x_1 &= 13\\
x_7 + x_6 + x_9 + x_3 &= 13\\
x_8 + x_6 + x_9 + x_3 &= 13\\
x_8 + x_{10} + x_4 + x_3 &= 13\\
x_5 + x_4 + x_3 &= 13\\
x_2 + x_7 + x_8 + x_5 &= 13\\
x_2 + x_6 + x_{10} + x_5 &= 13\\
x_2 + x_6 + x_4 &= 13\\
x_2 + x_{11} + x_9 + x_4 &= 13\\
x_1 + x_9 + x_4 &= 13\\
x_1 + x_3 &= 13
\end{aligned}$$

Löst man dieses lineare Gleichungssystem mit einem allgemeinen Verfahren, wie beispielsweise dem Gleichsetzungsverfahren, der Einsetzmethode oder auch dem Gauß-Algorithmus, so erhält man nach einer längeren Rechnung eine eindeutige Lösung. Um den Lösungsweg abzukürzen schauen wir uns etwas einfacher strukturierte Gleichungen an, die sich an den Seiten der einzelnen Quadrate ergeben und lösen diese suksessive nach x_1 auf:

$$\begin{aligned}
x_2 + x_1 = 13 &\Rightarrow x_2 = 13 - x_1\\
x_2 + x_{11} = x_1 &\Rightarrow x_{11} = x_1 - x_2 = 2x_1 - 13\\
x_1 + x_3 = 13 &\Rightarrow x_3 = 13 - x_1\\
x_1 + x_{11} = x_9 + x_3 &\Rightarrow x_9 = x_1 + x_{11} - x_3 = 4x_1 - 26\\
x_6 = x_{11} + x_9 &\Rightarrow x_6 = 6x_1 - 39\\
x_4 + x_9 = x_3 &\Rightarrow x_4 = x_3 - x_9 = 39 - 5x_1\\
x_7 + x_6 + x_{11} = x_2 &\Rightarrow x_7 = x_2 - x_6 - x_{11} = 65 - 9x_1
\end{aligned}$$

$$x_7 = x_8 \Rightarrow x_8 = 65 - 9x_1$$
$$x_7 + x_8 = x_6 + x_{10} \Rightarrow x_{10} = x_7 + x_8 - x_6 = 169 - 24x_1$$
$$x_5 = x_8 + x_{10} \Rightarrow x_5 = 234 - 33x_1$$
$$x_5 + x_{10} = x_4 \Rightarrow x_4 = 403 - 57x_1$$

Da wir nun zwei Gleichungen für x_4 haben, können wir diese gleichsetzen und nach x_1 auflösen, was zu $x_1 = 7$ führt. Einsetzen liefert $x_1 = 7$, $x_2 = 6$, $x_3 = 6$, $x_4 = 4$, $x_5 = 3$, $x_6 = 3$, $x_7 = 2$, $x_8 = 2$, $x_9 = 2$, $x_{10} = 1$ und $x_{11} = 1$.

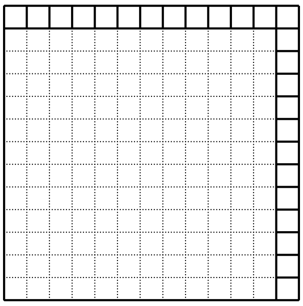

Abbildung 1: Fliesplan für Teilaufgabe (a).

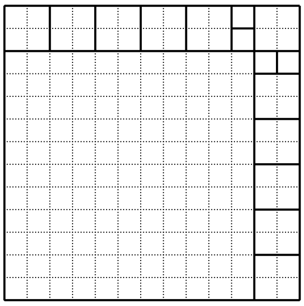

Abbildung 2: Fliesplan für Teilaufgabe (b).

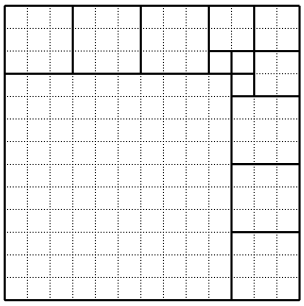

Abbildung 3: Fliesplan für Teilaufgabe (c).

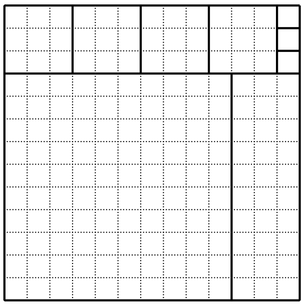

Abbildung 4: Unfertiger Fliesplan für Teilaufgabe (c).

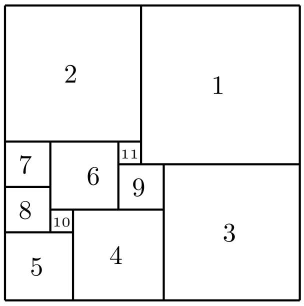

Abbildung 5: Fliesplan für Teilaufgabe (d).

Wie kann man diese Aufgabe mit etwas mehr Mathematik eleganter Lösen? Gerade die Fallunterscheidungen in den Aufgabenteilen (a)–(c) waren doch recht umfangreich. Stellen wir uns zunächst eine etwas allgemeinere Optimierungsaufgabe vor: Ein $n \times n$ Quadrat soll mit Fliesen der Form $a \times a$ gefliest werden, wobei a alle natürlichen Zahlen zwischen 0 und $n - 1$ annehmen kann. Wie lautet der kostengünstigste Fliesplan, falls eine $a \times a$-Fliese c_a kostet?

Derartige (diskrete Optimierungs-)Probleme lassen sich in der Regel lösen, indem man sie als Ganzzahliges Lineares Programm modelliert. Hierzu brauchen wir zunächst *Entscheidungsvariablen* – Objekte, die die problemspezifischen Entscheidungen repräsentieren ohne diese festzulegen. Mit geometrischen Strukuren zu *rechnen* ist immer etwas schwierig. Also überlegen wir uns eine andere Darstellungsform des Fliesplans aus Abbildung 5: Wir betrachten eine 13×13-Tabelle und tragen in jedes Feld ein, von welcher Fliesengrösse es bedeckt wird. In unserem Beispiel ergibt sich:

6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
2	2	3	3	3	1	7	7	7	7	7	7	7
2	2	3	3	3	2	2	6	6	6	6	6	6
2	2	3	3	3	2	2	6	6	6	6	6	6
2	2	1	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6
3	3	3	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6
3	3	3	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6
3	3	3	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6

6						7						
2		3			1							
					2		6					
2												
		1	4									
3												

Da die linke Tabelle etwas unübersichtlich ist und man die Grenzen zwischen unterschiedlichen Fliesen nicht so gut erkennen kann, haben wir in der rechten Tabelle nur jeweils die linke obere Ecke einer Fliese markiert. Dies scheint eine recht übersichtliche und kompakte Beschreibung des zugrunde liegenden geometrischen Musters zu sein.

Für die Wahl geeigneter Entscheidungsvariablen benötigen wir noch einen kleinen Modellierungstrick: Anstatt Variablen $x_{i,j}$ für die n^2 Felder unserer Tabelle zu verwenden, verwenden wir Binärvariablen $x_{i,j,h} \in \{0,1\}$. Hierbei soll $x_{i,j,h} = 1$ bedeuten, dass in Feld (i,j) der Tabelle die Zahl h steht. Hiermit können wir relativ leicht ausdrücken, dass in jeder Zelle nur höchstens eine Zahl stehen darf

$$\sum_{h=1}^{n-1} x_{i,j,h} \le 1 \qquad \forall 1 \le i,j \le n.$$

Die Bedingung, dass jedes Feld der Tabelle von genau einer Fliese überdeckt wird, lässt sich etwas komplizierter aber im Prinzip ähnlich durch

$$\sum_{h=1}^{n-1} \sum_{y=0}^{\min(i-1,h-1)} \sum_{x=0}^{\min(j-1,h-1)} x_{i-y,j-x,h} = 1 \qquad \forall 1 \le i,j \le n$$

ausdrücken. Da durch „genau eine Fliese“ insbesondere verlangt wird, dass pro Feld *höchstens* eine Fliese liegt, brauchen wir die zuvor genannte Bedingung nicht unbedingt (sie schadet aber auch nicht). Wir müssen noch berücksichtigen, dass keine Fliese über den Rand hinaus ragen soll:

$$x_{i,j,h} = 0 \qquad \forall 1 \le i,j \le n \,:\, i+h > n+1 \,\vee\, j+h > n+1.$$

Fügen wir nun noch die Zielfunktion

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{n-1} c_h \cdot x_{i,j,j}$$

hinzu, so ist unser verallgemeinertes Anwendungsproblem vollständig als Ganzzahliges Lineares Programm modelliert. Nebenbedingungen wie in den Aufgabenteilen (a)–(c), dass genau eine $k \times k$-Fliese verwendet werden soll, lassen sich durch eine weitere lineare Ungleichung wie

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j,k} = 1$$

erzwingen. Die Minimierung der Anzahl der Fliesen würde $c_h = 1$ entsprechen.

Mit Hilfe einer Modellierungssprache wie beispielsweise `ZIMPL` können wir folgenden Quellcode schreiben:

```
param n := 13;
set N := {1 to n};
set H := {1 to n-1};
var x[N cross N cross H] binary;
minimize Anzahl: sum <i,j,h> in N cross N cross H: x[i,j,h];

subto jedes_feld_genau_eine_fliese:
  forall <i,j> in N cross N:
    sum <h> in H:
      sum <y> in {0 to min(i-1, h-1)}:
```

```
        sum <x> in {0 to min(j-1, h-1)}: x[i-y,j-x,h] == 1;

subto nicht_ueber_den_rand_hinaus:
  forall <i,j,h> in N cross N cross H with i+h > n+1 or j+h > n+1:
    x[i,j,h] == 0;
```

Das zugehörige Ganzzahlige Lineare Programm wird dann automatisch erstellt und kann mit einem Standardlöser wie beispielsweise `IBM ILOG CPLEX` innerhalb kürzester Zeit gelöst werden. Exemplarisch geben wir in der folgenden Tabelle die Minimale Anzahl an Fliesen für verschiedene n an:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
min #Quadrate	4	6	4	8	4	9	4	6	4	11	4	11	4
Sekunden	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0	0.3	0
B&B-Knoten	1	1	1	1	1	5	1	1	1	39	1	41	1
n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
min #Quadrate	6	4	12	4	13	4	6	4	13	4	8	4	6
Sekunden	0.1	0.1	2	0.1	9	0.2	0.4	0.4	19	0.6	1	1	1
B&B-Knoten	1	1	92	1	168	1	1	1	173	1	1	1	1
n	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
min #Quadrate	4	14	4	15	4	6	4	8	4	15	4	6	4
Sekunden	1	930	2	3148	3	4	4	20	5	12634	9	8	9
B&B-Knoten	1	3341	1	7409	1	1	1	10	1	6911	1	1	1

Diese Zahlenfolge (A018835 in der *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*) „schreit" geradezu nach weiteren mathematischen Untersuchungen. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass das Minimum 4 beträgt, falls n gerade ist und sonst mindestens 6 Quadrate notwendig sind – was bei durch drei teilbaren n möglich ist. Natürlich sind dies eher mathematische Spielereien, denn ernstzunehmende praktische Anwendungen. Fordert man zusätzlich noch, dass alle Quadrate unterschiedlich groß sein sollen, so gibt es plötzlich einen Zusammenhang mit Widerständen in elektrischen Schaltkreisen (und damit auch den Kirchhoff'schen Regeln), siehe z. B.

`http://en.wikipedia.org/wiki/Squaring_the_square`

oder

`http://www.wissenschaft-online.de/spektrum/statisch/treitz/wi.htm`.

Die *ernsthaften Anwendungen*, die sich hinter dieser Aufgabe verstecken, finden sich in der Vorlesung „Ganzzahlige Optimierung" oder auch in eingeschränktem Umfang in der Vorlesung „Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler" hier an der Uni Bayreuth. Dort lernt man eine Vielzahl von Anwendungsproblemen in dieser „Sprache" auszudrücken. Speziell an Schüler richtet sich unser (reisendes) „Optimierungslabor"[1]. Das algorithmische, effiziente Lösen von Linearen Gleichungssystemen wird in sehr vielen praktischen Anwendungen (die Finite-Elemente-Methode, ein weit verbreitetes modernes Berechnungsverfahren aus dem Ingenieurwesen, führt auf das Lösen sehr großer linearer Gleichungssysteme[2]) benötigt. Ein paar fortgeschrittenere Methoden wie Gauß-Seidel-Verfahren, Cholesky-Zerlegung oder CG-Verfahren werden z. B. in Vorlesungen wie „Einführung in die Numerik" oder „Numerische Methoden partieller Differentialgleichungen" behandelt.

Unsere Ausgangsfrage mit der Briefmarke wollen wir natürlich ebenfalls nicht unbeantwortet lassen. Es handelt sich um eine Deutsche Sonderbriefmarke von 1998 zum Internationalen Mathematikerkongress in Berlin. Wir können zum Bestimmen der Seitenlängen genauso vorgehen, wie bei Teilaufgabe (d). Die Nummerierung der Quadrate haben wir in Abbildung 6 angegeben.

[1] http://www.wm.uni-bayreuth.de/index.php?id=optlabor

[2] http://www.tomshardware.de/Audi-Supercomputer,news-240847.html

Gehen wir zeilen- und spaltenweise durch, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 177 \\
x_1 + x_3 + x_6 &= 177 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 177 \\
x_4 + x_5 + x_9 + x_{11} &= 177 \\
x_4 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{11} &= 177 \\
x_4 + x_7 + x_{10} + x_{11} &= 177 \\
x_1 + x_4 &= 176 \\
x_1 + x_5 + x_7 &= 176 \\
x_2 + x_3 + x_5 + x_7 &= 176 \\
x_2 + x_3 + x_5 + x_8 + x_{10} &= 176 \\
x_2 + x_6 + x_9 + x_{10} &= 176 \\
x_2 + x_6 + x_{11} &= 176
\end{aligned}
$$

Das könnte man durch den Gauß-Algorithmus lösen, wir kürzen aber wieder ab, indem wir Gleichungen betrachten, die sich an den Seiten der einzelnen Quadrate ergeben.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 = 177 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 177 - x_2 \\
x_1 = x_2 + x_3 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = x_1 - x_2 = 177 - 2x_2 \\
x_2 = x_3 + x_6 \quad &\Rightarrow \quad x_6 = x_2 - x_3 = 3x_2 - 177 \\
x_1 + x_4 = 176 \quad &\Rightarrow \quad x_4 = 176 - x_1 = x_2 - 1 \\
x_1 + x_3 = x_4 + x_5 \quad &\Rightarrow \quad x_5 = x_1 + x_3 - x_4 = 355 - 4x_2 \\
x_4 = x_5 + x_7 \quad &\Rightarrow \quad x_7 = x_4 - x_5 = 5x_2 - 356 \\
x_5 = x_7 + x_8 \quad &\Rightarrow \quad x_8 = x_5 - x_7 = 711 - 9x2 \\
x_7 = x_8 + x_{10} \quad &\Rightarrow \quad x_{10} = x_7 - x_8 = 14x_2 - 1067 \\
x_{10} = x_8 + x_9 \quad &\Rightarrow \quad x_9 = x_{10} - x_8 = 23x_2 - 1778 \\
x_6 = x_9 + x_{11} \quad &\Rightarrow \quad x_{11} = x_6 - x_9 = 1601 - 20x_2 \\
x_{11} = x_9 + x_{10} \quad &\Rightarrow \quad x_{11} = 37x_2 - 2845
\end{aligned}
$$

Da wir nun zwei Gleichungen für x_{11} haben, können wir diese Gleichsetzung und nach x_2 auflösen, was zu $x_2 = 78$ führt. Einsetzen liefert $x_1 = 99$, $x_2 = 78$, $x_3 = 21$, $x_4 = 77$, $x_5 = 43$, $x_6 = 57$, $x_7 = 34$, $x_8 = 9$, $x_9 = 16$, $x_{10} = 25$ und $x_{11} = 41$.

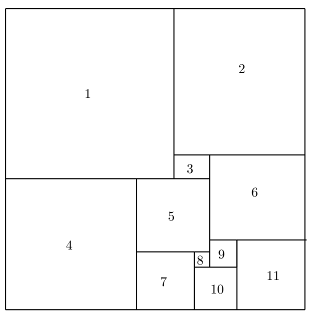

Abbildung 6: Quadratzerlegung eines 176×177-Rechtecks.

Aufgabe 2:

Für Aufgabeteil (a) bemerken wir dass es keine fünf Zahlen kleiner oder gleich eins geben kann, da das Produkt dieser fünf Zahlen nicht größer als eins sein kann. Eine Folge mit vier Zahlen kleiner oder gleich eins ist z. B. gegeben durch $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 121, 122, 123, \ldots, 1885$. Prüfen wir nun nur noch die geforderte Eigenschaft nach. Das Produkt von fünf dieser Zahlen ist mindestens so groß wie das Produkt der fünf kleinsten Zahlen $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 121 = \frac{121}{120} > 1$.

Für die Aufgabenteile (b) und (c) geben wir gleich drei Lösungsvorschläge:

1. Wenigstens eine der gegebenen 2011 Zahlen ist nicht kleiner als 1, da sonst alle Produkte aus jeweils 5 Zahlen kleiner als 1 wären. Diese Zahl bezeichnen wir mit p. Die restlichen 2010 Zahlen ordnen wir nun zu 402 Folgen der Länge 5. Da jeweils das Produkt der fünf Zahlen einer solchen Folge größer als 1 ist, ist auch das Produkt aller Folgen und p, also aller 2011 Zahlen größer als 1.

   Bei den anderen 2011 Zahlen können wir wieder eine solche Zahl $p > 1$ auswählen. Die restlichen 2010 Zahlen teilen wir nun in 30 Folgen der Länge 67 auf und wenden das selbe Argument wie zuvor an.

2. Wir ordnen die 2011 Zahlen in aufsteigender Reihenfolge an. Da das Produkt P_1 der ersten fünf Zahlen größer als 1 ist, muss die fünfte Zahl größer als 1 sein. Wegen der Monotonie sind auch alle weiteren Zahlen größer als 1 und das Produkt P_2 der letzteren 2006 Zahlen ist größer als 1. Somit ist das Produkt $P_1 \cdot P_2$ aller 2011 Zahlen größer als 1. Für den zweiten Fall lässt sich das selbe Argument anwenden.

3. Man betrachte alle Teilfolgen aus fünf Elementen der 2011 Zahlen. Jede Zahl ist in $n = 5 \cdot 2010 \cdot 2009 \cdot 2008 \cdot 2007$ dieser Zahlfolgen enthalten. Bilden wir das Produkt der Elemente aller dieser Teilfolgen, so ist es einerseits größer als 1 und andererseits ist es die n-te Potenz des Produktes aller 2011 Zahlen. Somit ist auch letzteres Produkt größer als 1. Für den zweiten Fall lässt sich das selbe Argument anwenden.

Aufgabe 3:

(a) Jedes der drei Elemente aus $\{T, I, G\}$ ist in einer Teilmenge entweder enthalten oder nicht. Es gibt somit $2^3 = 8$ Teilmengen: $\emptyset$, $\{T\}$, $\{I\}$, $\{G\}$, $\{T, I\}$, $\{T, G\}$, $\{I, G\}$, $\{T, I, G\}$.

(b) Abstürze: $\{T, M\}$, $\{T, G\}$, $\{T, I, M\}$, $\{T, I, G\}$, $\{T, M, G\}$, $\{T, I, M, G\}$
Ordnungsgemäßer Betrieb: $\{T\}$, $\{I\}$, $\emptyset$
Unklares Verhalten: $\{M\}$, $\{G\}$, $\{T, I\}$, $\{I, M\}$, $\{I, G\}$, $\{I, M, G\}$, $\{M, G\}$

(c) Stellt man die beiden Anfragen $\{G\}$ und $\{T, I, M\}$, so kann man das komplette Verhalten des Computers schlussfolgern. Testet man die „Kombination" $\{G\}$ so stellt man fest, dass der Computer abstürzt. Da $\{G\}$ jeweils eine Teilmenge von $\{T, G\}$, $\{I, G\}$, $\{M, G\}$, $\{T, I, G\}$, $\{T, M, G\}$, $\{I, M, G\}$ oder $\{T, I, M, G\}$ ist, wird der Computer auch in diesen Fällen abstürzen. Testet man die Kombination $\{T, I, M\}$, so stellt man fest, dass der Computer einwandfrei weiter läuft. Da die Mengen $\emptyset$, $\{T\}$, $\{I\}$, $\{M\}$, $\{T, I\}$, $\{T, M\}$ und $\{I, M\}$ Teilmengen von $\{T, I, M\}$ sind, wird er auch in diesen Fällen ohne Probleme funktionieren. Somit kann man für jede der 16 möglichen Kombinationen von Computerprogrammen vorhersagen, wie sich der Computer verhalten wird. Wenn es mit zwei Tests geht, kann man es natürlich auch mit drei Tests herausfinden.

Es bleibt noch zu zeigen, dass ein einziger Test nicht ausreicht, um das vollständige Verhalten des Computers herauszufinden. Testet man eine der Kombinationen $\{G\}$, $\{T, G\}$, $\{I, G\}$, $\{M, G\}$, $\{T, I, G\}$, $\{T, M, G\}$, $\{I, M, G\}$ oder $\{T, I, M, G\}$, so wird man herausfinden, dass der Computer abstürzt. Das Verhalten bei z. B. $\{T, I\}$ ist aber noch nicht eindeutig festgelegt (es könnten beide Möglichkeiten realisiert werden). Testet man dagegen eine der übrigen Kombinationen $\emptyset$, $\{T\}$, $\{I\}$, $\{M\}$, $\{T, I\}$, $\{T, M\}$, $\{I, M\}$ oder $\{T, I, M\}$, so findet man heraus, dass der Computer im jeweils getesteten Fall einwandfrei funktioniert, kann aber noch nichts über das Verhalten bei der „Kombination" $\{G\}$ sagen.

Die zugrunde liegende mathematische Struktur hinter diesem vereinfacht dargestellten Anwendungsproblem ist eine sogenannte Boolsche Funktion $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ mit $f(x) \leq f(y)$

falls $x \in \{0,1\}^n$ komponentenweise kleinergleich $y \in \{0,1\}^n$ ist. Die Bestimmung der Anzahl monotoner Boolscher Funktionen ist ein berühmtes mathematisches Problem – Dedekinds Problem. Es gibt monotone Boolsche Funktionen, bei denen man eine sehr große (exponentielle) Anzahl an Anfragen braucht, um die Funktion eindeutig zu bestimmen. (Die maximale Anzahl der notwendigen Anfragen läßt sich mit Hilfe der sogenannten Spernertheorie bestimmen.) Begegnen könnten einem diese monotonen Boolschen Funktionen in der *Theoretischen Informatik* (Stichwort: Effizientes Lernen monotoner Boolscher Funktionen), in Spezialveranstaltungen zur *Diskreten Mathematik* bzw. *Kombinatorik* oder bei Spezialveranstaltungen zu Wahlsystemen ggf. auch in einem wirtschaftswissenschaftlichen Studium.

Aufgabe 4:

(a) Um die zugrunde liegende Situation genauer beschreiben zu können, führen wir ein paar Variablen ein. Mit v_L bezeichnen wir die Geschwindigkeit der radelnden Leonie, mit v_S die Geschwindigkeit der Straßenbahn, jeweils gemessen in Metern pro Minute. Die Taktung, also der Zeitabstand zwischen zwei abfahrenden Straßenbahnen auf einer Seite der Strecke, bezeichnen wir mit t_S, gemessen in Minuten. Um eine festgelegte Orientierung zu haben, nehmen wir an, dass Leonie von *rechts* nach *links* fährt.

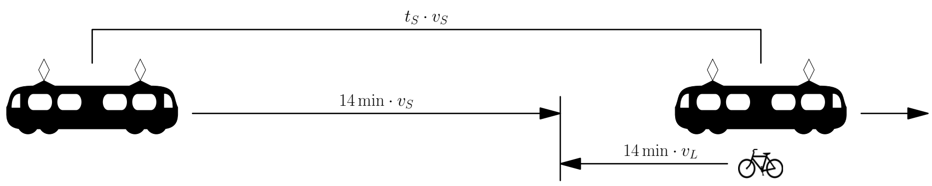

Abbildung 7: Leonie begegnet eine Straßenbahn.

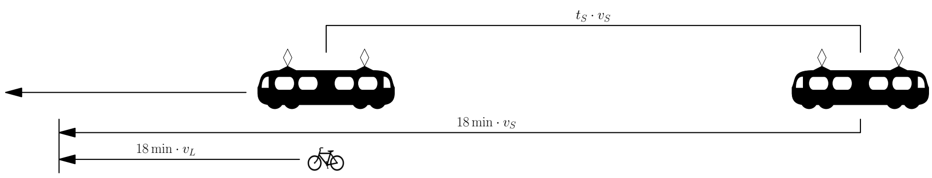

Abbildung 8: Leonie wird von einer Straßenbahn überholt.

Zum Zeitpunkt an dem Leonie auf gleicher Höhe mit einer von links kommenden Straßenbahn ist, ist die t_S Minuten später losgefahrene, von links kommende, Straßenbahn genau $v_S \cdot t_S$ Meter entfernt. Nach 14 Minuten treffen sich die letztere Straßenbahn und Leonie. Da Leonie in dieser Zeit eine Strecke von $v_L \cdot 14$ Metern und die Straßenbahn eine Strecke von $v_S \cdot 14$ Metern zurück legt, gilt

$$v_S \cdot t_S = 14v_S + 14v_L.$$

Für die von der rechten Seite kommenden Straßenbahnen können wir ähnlich argumentieren. Zu berücksichtigen ist nur, dass Leonie der Straßenbahn nicht entgegen sondern davon fährt. Es ergibt sich die Gleichung

$$v_S \cdot t_S + 18v_L = 18v_S.$$

Setzen wir die rechte Seite der ersten Gleichung in die zweite ein, so erhalten wir

$$14v_S + 32v_L = 18v_S,$$

was sich zu $v_L = \frac{1}{8} \cdot v_S$ umformen lässt. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, so erhalten wir

$$v_S t_S = 15{,}75 v_S.$$

Da $v_S \neq 0$ also $t_s = 15{,}75$ Minuten bzw. 15 Minuten und 45 Sekunden.

(b) Beispiele anzugeben reicht bei dieser Aufgabe natürlich vollkommen. Wir werden trotzdem zeigen, wie man eine ganze Klasse von Beispielen konstruieren kann. Zunächst müssen wir $a \neq -b$ voraussetzen, da sonst der Bruch nicht definiert ist. Für $a = 0$ oder $a = b$ ist $\frac{a(a-b)}{a+b} = 0$ eine ganze Zahl. In allen anderen Fällen sei t der größte gemeinsame Teiler von a und b. Es gibt also ganze Zahlen a', b' mit $a = a't$, $b = b't$ so dass a' und b' teilerfremd sind. Setzen wir ein, so erhalten wir

$$\frac{a(a-b)}{a+b} = \frac{ta't(a'-b')}{t(a'+b')} = \frac{ta'(a'-b')}{a'+b'}$$

Da $\mathrm{ggT}(a', a'+b') = \mathrm{ggT}(a', a'+b'-a') = \mathrm{ggT}(a', b') = 1$ und $\mathrm{ggT}(a'-b', a'+b') = \mathrm{ggT}(a'-b', 2a')$ teilt $\mathrm{ggT}(2a'-2b', 2a') = \mathrm{ggT}(2b', 2a') = 2$ gilt, muss t durch $a'+b'$ oder $\frac{a'+b'}{2}$ teilbar sein. Wählen wir also beliebige ganze Zahlen $a' > b' \geq 1$ und setzen $t = a'+b'$, $a = a't$, $b = b't$, so ist $\frac{a)a-b)}{a+b}$ eine ganze Zahl. Wählen wir beispielsweise $a' = 2$ und $b' = 1$, so ergibt sich $t = 3$, $a = 6$, $b = 3$ und $\frac{a(a-b)}{a+b} = 2$. (Der Zusammenhang mit Aufgabenteil (a) ist etwas versteckt. Wählen wir anstatt der Zahlen von 18 Minuten und 14 Minuten allgemeiner a Minuten bzw. b Minuten, so ergibt sich mit der selben Rechnung wie in Aufgabenteil (a), dass $t_S = \frac{a(a-b)}{a+b}$ gilt. Wenn wir also gerne hätten, dass die Anwort von Teil (a) ein ganze Zahl sein soll (aus der Sichtweise des Aufgabenstellers), dann hätten wir a und b so wie in diesem zweiten Aufgabenteil beschrieben, wählen müssen.)