Lösungen der Zusatzaufgaben

Vorbemerkung: Im Folgenden geben wir jeweils eine mögliche Lösung zu den Wettbewerbsaufgaben des 6. Bayreuther Tags der Mathematik an. Natürlich kann es auch andere, evtl. sogar elegantere, Lösungswege geben. Über Hinweise zu alternativen Lösungswegen würden wir uns sehr freuen und auch bei Unklarheiten oder Fehlern möchten wir gerne davon hören; z. B. per Email an `sascha.kurz@uni-bayreuth.de`. Wir haben es uns nicht nehmen lassen bei manchen Aufgaben noch einige Bemerkungen zum Hintergrund und den Verknüpfungen zur Universitätsmathematik anzugeben. Diese können teilweise schwieriger nachzuvollziehen sein – klar, es wird ja auch Universitätsstoff angedeutet. Wir hoffen, dass sich anfängliches Zurückschrecken in Erstaunen darüber wandeln wird, wie mächtig mathematische Methoden sein können und wozu sie eingesetzt werden können.

Aufgabe 1:

Der Typ dieses Rätsel ist sehr klassisch und vielen in folgender, oder einer ähnlichen, Variante bekannt:

> „Alkuin, der Abt des Klosters St. Martin in Tours, war der Lehrer und Ratgeber Karls des Großen. Er hat ein Buch mit Rechen- und Denkaufgaben verfasst und erzählt darin diese Geschichte:
> Am Ufer eines Flusses steht ein Mann mit einem Wolf, einer Ziege und einem Krautkopf. Er findet ein winziges Boot, worin außer ihm selbst als Ruderer immer nur eines der drei mitgeführten Dinge Platz hat. Der Mann steht nun also nicht nur am Ufer, sondern auch vor einem großen Problem: Den Wolf und die Ziege kann er nicht allein lassen, sonst zerreißt der eine die andere. Die Ziege und der Krautkopf dürfen aber auch nicht zusammen an einem Ufer bleiben, sonst frisst die Ziege das Gemüse.
> Was tun?“

Derartige Rätsel gibt es viele. Alle haben eine Gemeinsamkeit: Man kann sie systematisch mit Hilfe von Graphentheorie bzw. Algorithmen für Kürzeste-Wege-Probleme lösen.

Abstrakt gesehen, kann man die Situationen nach einer Flussüberquerung dadurch beschreiben, indem man angibt, wer sich auf der linken und wer sich auf der rechten Seite des Flusses befindet. Kürzen wir unsere vier Protagonisten mit den Buchstaben M, W, Z und K ab, so lässt sich der *Startzustand* durch $KMWZ/$ und der gewünschte *Zielzustand* durch $/KMWZ$ beschreiben. Insgesamt gibt es $2^4 = 16$ mögliche *Zustände*, jeder der vier Protagonisten befindet sich auf einer der beiden Seiten des Flusses. Die Position des Bootes müssen wir in unserem Fall nicht extra beschreiben, weil es sich immer dort befindet, wo M gerade ist.

Von diesen 16 Zuständen sind aber die folgenden sechs verboten: WZ/KM, KM/WZ, KWZ/M, M/KWZ, KZ/MW, MW/KZ, damit nichts und niemand aufgefressen wird. Die restlichen 10 Zustände sind in friedlicher Koexistenz möglich. Wenn man in einem bestimmten Zustand ist, gibt es meist mehrere Möglichkeiten in einen neuen Zustand zu kommen. Im Startzustand $KMWZ/$ kann der Mann mit der Ziege, dem Wolf oder dem Kohlkopf auf die andere Seite fahren, was durch die Zustände KW/MZ, KZ/MW, bzw. WZ/KM beschrieben werden würde. Hier ist allerdings, wie oben beschrieben, nur der erste Zustand erreichbar.

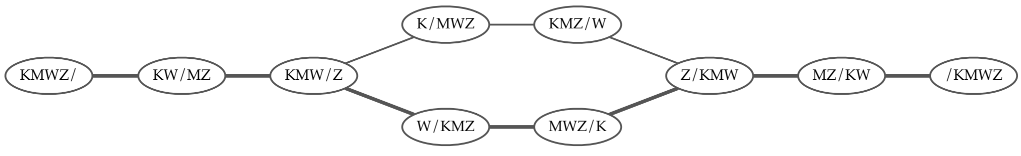


Abbildung 1: Objekte links des Schrägstrichs haben den Fluss noch nicht überquert. Der kürzeste Weg führt entlang der fetten Kanten.

Zeichnet man für jeden möglichen Zustand einen Kreis und verbindet jeden Zustand mit all seinen möglichen Folgezuständen durch eine Kante, so erhält man den in Abbildung 1 dargestellten *Graphen* (die Zustände sind die *Knoten*).

In der Sprache der Mathematik sucht man nun in einem gegebenen Graphen einen (kürzesten Weg) von einem Startknoten (Startzustand) zu einem Zielknoten (Zielzustand). Hierfür gibt es sehr schnelle Algorithmen, z. B. den Dijkstra-Algorithmus. Die fetten gedruckten Kanten in Abbildung 1 markieren den kürzesten solchen Weg im Mann-Kohlkopf-Wolf-Ziege-Rätsel.

In unserem Rätsel kann man, wenn man systematisch vorgehen möchte, genauso wie eben beschrieben vorgehen. Zunächst muss man also den Graph *modellieren*. Wir haben wieder vier Protagonisten, die sich links und rechts der Brücke befinden können. Zusätzlich müssen wir noch beschreiben, wo sich die Taschenlampe befindet. (Es ist nur wichtig, ob sich die Taschenlampe gerade auf der linken Seite der Brücke befindet, oder auf der rechten Seite der Brücke. Wer sie getragen hat, spielt keine Rolle.) Wir erhalten also $2^5 = 32$ mögliche Zustände. (Die Zustände $T/ABCD$ und $ABCD/T$ können allerdings nicht erreicht werden, da die Taschenlampe immer von jemanden getragen werden muss.) Der Startzustand wird durch $ABCDT/$ und der Zielzustand durch $/ABCDT$ beschrieben. Die Kanten müsste man so einzeichnen, dass die Taschenlampe immer und exakt einer oder zwei Konfirmanden die Seite wechseln. Die benötigte Zeit können wir berücksichtigen, indem wir sie an jede Kante mit dran schreiben. Der Wechsel von $ABCDT/$ zu CD/ABT dauert z. B. 25 Minuten, weil immer beide gleich schnell laufen müssen, um das Licht der Taschenlampe nutzen zu können.

Die Länge eines Weges ist dann hier durch die Summe der Zahlen auf den verwendeten Kanten gegeben. Auch hier suchen wir wieder einen kürzesten Weg. Wenn der kürzeste Weg eine Länge von maximal 60 Minuten hat, geht es, ansonsten nicht.

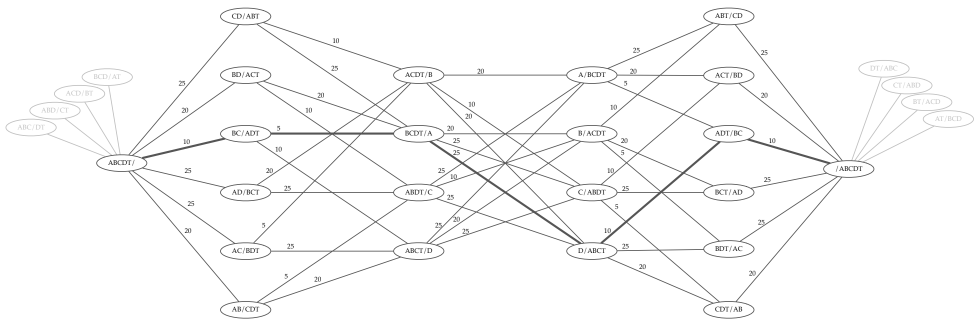


Abbildung 2: Objekte links des Schrägstrichs haben die Brücke noch nicht überquert. Der kürzeste Weg führt entlang der fetten Kanten.

In Abbildung 2 haben wir versucht, den zugehörigen Graphen so übersichtlich wie möglich darzustellen. Eine weitere Möglichkeit ist, diese Information in einer Distanzmatrix, siehe Tabelle 1 darzustellen, d. h. für je zwei Knoten tragen wir den Abstand zwischen diesen beiden Knoten ein. Falls es zwischen zwei Knoten keine Kante gibt, markieren wir dies durch -. Da die Abstände in unserem Fall *symmetrisch* sind, reicht es, das rechte obere Dreieck der Tabelle ausfüllen.

Den zugehörigen kürzesten Weg, mit Länge 60, haben wir in Abbildung 2 wiederum durch fett markierte Kanten markiert. Ausgeschrieben lautet er:

$$ABCDT/ \xrightarrow{10} BC/ADT \xrightarrow{5} BCDT/A \xrightarrow{25} D/ABCT \xrightarrow{10} ADT/BC \xrightarrow{10} /ABCDT$$

Natürlich kann man dieses kleine Beispiel auch etwas *unsystematischer* bzw. ohne Verwendung von Graphentheorie lösen. Bastian und Christina sollten die Brücke insgesamt exakt ein Mal überqueren, da ein dreimaliges Überqueren bereits mindestens 60 Minuten dauern würde. (Die Anzahl der Überquerungen muss für alle Konfirmanden eine ungerade Zahl

	ABCDT/	AB/CDT	AC/BDT	AD/BCT	BC/ADT	BD/ACT	CD/ABT	BCDT/A	ACDT/B	ABDT/C	ABCT/D	A/BCDT	B/ACDT	C/ABDT	D/ABCT	ABT/CD	ACT/BD	ADT/BC	BCT/AD	BDT/AC	CDT/AB	/ABCDT
ABCDT/	0	20	25	25	20	20	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AB/CDT		0	-	-	-	-	-	-	-	5	20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AC/BDT			0	-	-	-	-	-	5	-	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AD/BCT				0	-	-	-	-	20	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BC/ADT					0	-	-	5	-	-	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BD/ACT						0	-	20	-	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CD/ABT							0	25	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BCDT/A								0	-	-	-	-	20	25	25	-	-	-	-	-	-	-
ACDT/B									0	-	-	20	-	10	20	-	-	-	-	-	-	-
ABDT/C										0	-	25	10	-	25	-	-	-	-	-	-	-
ABCT/D											0	25	20	25	-	-	-	-	-	-	-	-
A/BCDT												0	-	-	-	25	20	5	-	-	-	-
B/ACDT													0	-	-	10	-	-	20	5	-	-
C/ABDT														0	-	-	10	-	25	-	5	-
D/ABCT															0	-	-	10	-	25	20	-
ABT/CD																0	-	-	-	-	-	25
ACT/BD																	0	-	-	-	-	20
ADT/BC																		0	-	-	-	10
BCT/AD																			0	-	-	25
BDT/AC																				0	-	25
CDT/AC																					0	20
/ABCDT																						0

Tabelle 1: Distanzmatrix.

sein, wie man sich leicht überlegen kann.) Auch sollten Bastian und Christina möglichst gemeinsam die Brücke überqueren, da sie sonst Anna bzw. Dennis ziemlich *ausbremsen* würden. In der ersten Runde geht dies dann allerdings nicht. Also könnte man mit Anna und Dennis anfangen. Einer der beiden muss zurücklaufen, da sich die Taschenlampe nun auf der rechten Seite der Brücke befindet. Da Dennis der schnellere ist, versuchen wir es mit ihm. Nun könnten Bastian und Christina die Brücke gemeinsam überqueren. Die schnellste Person auf der rechten Seite, in diesem Fall Anna, bringt die Taschenlampe zurück und es müssen nur noch Anna und Dennis die Brücke überqueren. Nun prüft man noch nach, dass diese Lösung wirklich mit 60 Minuten auskommt.

Durch Angabe dieser Lösung weiß man nun, dass es in 60 Minuten möglich ist. Man weiß aber nicht – jedenfalls nicht ohne weitere Überlegungen – dass es nicht in 30 Minuten oder 40 Minuten ebenfalls geht. Eine solche *untere* Schranke kann man z. B. durch folgende Überlegung bekommen: Egal wer die Brücke überquert, man braucht mindestens fünf Überquerungen der Brücke, damit am Ende alle vier auf der rechten Seite sind. Anna, Bastian und Christina müssen die Brücke alle mindestens ein Mal überqueren. Dafür werden in jedem Fall mindestens $25 + 10 = 35$ Minuten benötigt. Werden die drei restlichen Überquerungen nur von Dennis durchgeführt, so werden dafür noch mal mindestens $3 \cdot 5 = 15$ Minuten benötigt, so dass es definitiv nicht schneller als in 50 Minuten gehen kann. (Verwendet man einen kürzeste-Wege-Algorithmus, so stellt man fest, dass es definitiv nicht schneller als in 60 Minuten gehen kann. Argumentativ kann man dies zwar auch, dafür aber nur mit einiger Mühe begründen.)

Modellierung mit Hilfe von Graphen und die Verwendung von Kürzeste-Wege-Algorithmen kann also helfen derartige Rätsel systematisch zu lösen. Eingesetzt werden diese Algorithmen aber vor allem bei praktischen Problemen. Das Navigationsgerät im Auto berechnet quasi auf Knopfdruck kürzeste Wege in einem Graphen mit ca. 5 Millionen Knoten und 6 Millionen Kanten. Falls Ihr mehr wissen wollt, fragt doch einfach mal Euren Mathelehrer, ob er nicht einen der einfacheren Kürzeste-Wege-Algorithmen, wie beispielsweise den Dijkstra-Algorithmus, im Unterricht behandeln kann. (Der ist nämlich gar nicht so schwer.) Für große Graphen und komplizierte Anwendungsprobleme braucht man allerdings auch kompliziertere Algorithmen wie beispielsweise den $A^{\star}$-Algorithmus. An der Universität Bayreuth kann man diese Algorithmen zum Beispiel in der Vorlesung „Graphen- und Netzwerkalgorithmen“ erlernen.

Aufgabe 2:

- Betrachten wir zunächst die 6. Behauptung. Wäre sie falsch, so wäre sie damit wieder erfüllt, was ein Widerspruch ist. Also muss Behauptung Nr. 6 richtig sein.
- Wäre die erste Behauptung richtig, so könnte die zweite Behauptung weder richtig noch falsch sein. Somit ist die erste Behauptung falsch. (Hier hilft es evtl. die *De Morgan'sche Regel* $\overline{(a \vee b)} = \overline{a} \wedge \overline{b}$ zu verwenden. Die Negation der zweiten Behauptung lautet somit: „Dies ist nicht die erste richtige Behauptung und nicht die erste falsche Behauptung."
- Da Behauptung Nr. 1 falsch ist, müssen die Behauptungen 9 und 10 ebenfalls falsch sein.
- Falls Behauptung Nr. 3 falsch wäre, so müssten die Behauptungen 4 und 8 richtig sein, damit es keine drei aufeinanderfolgenden falschen Behauptungen gibt. Da sich Behauptung 4 und 8 aber widersprechen, muss Behauptung 3 richtig sein.
- Damit es drei aufeinanderfolgende falsche Behauptungen geben kann, muss Behauptung 8 falsch sein.
- Wegen der Richtigkeit von Behauptung 6 muss Behauptung 7 ebenfalls wahr sein.
- Da die Behauptungen 6 und 7 richtig sind, muss die gesuchte Zahl durch 42 teilbar sein. Da aber weiter die Summe der Nummern der richtigen Behauptungen nach unserem bisherigen Wissensstand kleiner als 42 sein muss, ist Behauptung 5 falsch.

Bisher haben wir alle Wahrheitswerte bis auf die der Behauptungen 2 und 4 bestimmt. Wegen der Richtigkeit der Behauptungen 6 und 7 muss die gesuchte Zahl durch 42 teilbar sein, was unter anderem bedeutet, dass sie grössergleich 42 sein muss.

- Die Variante, dass die Behauptungen 2 und 4 beide falsch sind zusammen mit der Zahl 42 ist somit widerspruchsfrei, wie man leicht nachprüfen kann. Wir haben die kleinstmögliche Zahl gefunden.
- Ist Behauptung 2 falsch und Behauptung 4 richtig, so muss die Zahl durch 84 teilbar sein und 84 ist die kleinste derartige Zahl ohne Widersprüche.
- Ist Behauptung 2 richtig, Behauptung 4 aber falsch, so ist 42 die kleinste derartige Zahl ohne Widersprüche.
- Sind Behauptungen 2 und 4 beide richtig, so muss die gesuchte Zahl durch 420 teilbar sein und 420 ist die kleinste derartige Zahl ohne Widersprüche.

Die dargestellten Schlüsse waren doch relativ trickreich und speziell auf das *Rätsel* zugeschnitten. Doch auch hier ist es möglich die Aufgabenstellung in einen etwas größeren Rahmen einzubetten. Bei der Verifikation und dem Entwurf von logischen Schaltungen stellt sich manchmal das Teilproblem, zu entscheiden, ob eine aussagenlogische Formel durch geeignete Variablenbelegungen erfüllbar ist. Betrachten wir als Beispiel die Formel

$$A = (x_1 + \overline{x_3} + x_4) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_2} + x_3) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + x_4)\,,$$

wobei $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$, $\overline{x_i} = 1 - x_i$ und $1 + 1 = 1$ gelten soll. Hierbei soll 0 *falsch* und 1 *wahr* bedeuten. Gesucht ist eine Variablenbelegung, so dass $A = 1$ gilt bzw. ein Zertifikat dafür, dass es keine derartige Variablenbelegung gibt. Im Prinzip könnte man bei n Variablen einfach alle 2^n Möglichkeiten ausprobieren. Da n aber bei praktischen Problemen durchaus sehr gross werden kann, braucht man schnellere Algorithmen. Vom theoretischen Standpunkt aus gibt es wahrscheinlich keinen *schnellen* Algorithmus (genauer: einen mit polynomialer Laufzeit), da das sogenannte Erfüllbarkeitsproblem $\mathcal{NP}$-vollständig ist. (Die Komplexitätsanalyse, also eine Art Laufzeitanalyse, von Algorithmen begegnet einem z. B. in Vorlesungen aus dem Bereich der *Theoretischen Informatik* oder auch in den *Graphen- und Netzwerkalgorithmen*.) Nichtsdestotrotz gibt es Algorithmen, die praktische Probleme mit mehreren tausend Variablen innerhalb von Sekundenbruchteilen lösen können [1].

[1] http://www.sat4j.org/

Bei unserem Rätsel suchen wir auch eine Variablenbelegung $x_1, \ldots, x_{10}$, nur die Formel für A kennen wir noch nicht. Mit ein bisschen Nachdenken können wir aber den Textbeschreibungen Teilformeln entnehmen, die wahr sein müssen. Beispiele sind

$$\begin{aligned}
A_1 &= x_6 \\
A_2 &= (\overline{x_1} \cdot x_2) + (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) \\
A_3 &= x_4 + x_5 + (x_3 \cdot \overline{x_4} \cdot \overline{x_5}) \\
A_4 &= \overline{x_8} + (\overline{x_4} \cdot \overline{x_5} \cdot \overline{x_7} \cdot \overline{x_9})
\end{aligned}$$

Die erste Formel $A_1 = 1$ besagt einfach, dass Behauptung 6 wahr sein muss. Die zweite Formel A_2 besagt, dass entweder Behauptung 1 falsch und Behauptung 2 wahr ist, oder Behauptung 1 falsch und Behauptung 2 falsch. Ein Löser für ein Erfüllbarkeitsproblem (SAT) würde, wie auch wir, hieraus sofort schließen, dass Behauptung 1 falsch ist. Die dritte Formel $A_3 = 1$ kodiert den Schluss, dass Behauptung 3 wahr sein muss, wenn die Behauptungen 4 und 5 beide falsch sind. Da die Wahrheit einer der Behauptungen 4, 5, 7 oder 9 implizieren würde, dass die gesuchte Zahl eine ganze Zahl ist, widerspricht dies der Wahrheit von Behauptung 8. Diese Schlussweise wird in Formel A_4 kodiert. Die Kombination der vier gefundenen Formeln würden wir einfach durch $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$ erhalten, da ja alle vier Ausdrücke gleichzeitig wahr sein müssen. Das Auffinden von logischen Schlüssen aus dem Text kann uns der Computer (noch?) nicht abnehmen, aber sobald wir den Text in logische Formeln *übersetzt* haben, kann er uns beim Herleiten von Aussagen helfen (und ist dabei i. A. auch wesentlich effektiver als wir).

Aufgabe 3:

Zunächst wählen wir eine geeignete Einheit, um Beispiele zeichnen zu können. Da die Seitenlängen aller Fliesen Vielfache von 2 dm sind, soll die Seitenlänge eines (quadratischen) Kästchen 2 dm = 20 cm entsprechen. In den vier Teilaufgaben geht es also darum ein 13×13 Quadrat in möglichst wenige $n \times n$-Quadrate zu zerlegen, wobei n eine natürliche Zahl zwischen 1 und 12 ist.

(a) Egal wie wir das 12×12-Quadrat im 13×13-Quadrat (rechtwinklig) platzieren, die entstehenden Lücken können nur mit 1×1-Quadraten gefüllt werden. Benötigt werden genau $13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$ 1×1-Quadrate. Insgesamt werden also 26 Fliesen benötigt. Siehe Abbildung 3.

(b) Egal wie wir das 11×11-Quadrat im 13×13-Quadrat (rechtwinklig) platzieren, die entstehenden Lücken können nur mit 1×1-Quadraten oder 2×2-Quadraten gefüllt werden. Schließt das 11×11-Quadrat nicht in einer der Ecken des 13×13-Quadrates ab, können nur noch 1×1-Quadrate verwendet werden, so dass insgesamt $13^2 - 11^2 = 169 - 121 = 48$ 1×1-Quadrate benötigt würden. Abbildung 4 zeigt aber einen Fliesplan, der mit nur 16-Quadraten auskommt. Wir können also im folgenden davon ausgehen, dass die linke untere Ecke des 11×11-Quadrates mit der linken unteren Ecke des 13×13-Quadrates übereinstimmt (wie in Abbildung 4). Für die übrig gebliebene Fläche benötigen wir mindestens $\frac{13^2 - 11^2}{2^2} = 12$ zusätzliche Fliesen. Da aber die obere Seitenlänge eine ungerade Zahl ist, können wir nicht nur 2×2-Quadrate verwenden, sondern müssen auch mindestens 1 1×1-Quadrat verwenden. Die theoretische kleinstmögliche Anzahl an Fliesen ergibt sich, wenn wir genau 11 2×2-Fliesen (also genau eine weniger als 12, was nicht ging) und 4 1×1-Fliesen verwenden. Das dies so möglich ist, sieht man in Abbildung 4. Als minimale Anzahl notwendiger Fliesen ergibt sich somit $1 + 11 + 4 = 16$.

(c) In Abbildung 5 ist ein Fliesplan angegeben, der mit einer 10×10-, sechs 3×3-, drei 2×2- und drei 1×1-Fliesen, also insgesamt 13 Fliesen auskommt. Im folgenden wollen wir zeigen, dass es mit 12 oder weniger Fliesen nicht möglich ist. Für die Lücken, die das 10×10-Quadrat übrig lässt können nur 1×1-, 2×2- oder 3×3-Quadrate verwendet werden. Würde man auf die Verwendung von 3×3-Quadraten verzichten, so würde man mindestens $\frac{13^2 - 10^2}{2^2} = 17{,}25$ zusätzliche Quadrate benötigen, was zu viele wären. Wir können also im Folgenden davon ausgehen, dass die linke untere Ecke des

10×10-Quadrates mit der linken unteren Ecke des 13×13-Quadrates übereinstimmt (wie in Abbildung 5). Wir machen nun eine Fallunterscheidung nach der Anzahl der verwendeten 3×3-Quadrate.

(i) Falls nicht mehr als fünf 3×3-Quadrate verwendet werden, so benötigt man mindestens 13 Quadrate insgesamt: Bezeichnen wir die Anzahl der verwendeten 3×3-Quadrate mit x, so müssen noch mindestens $\frac{13^2-10^2-x\cdot 3^2}{2^2} = \frac{69-9x}{4}$ weitere Quadrate verwendet werden, so dass sich insgesamt mindestens $1+x+\frac{69-9x}{4} = \frac{73-5x}{4}$ Quadrate ergeben würden. Für $x \leq 4$ wären dies mehr als 13, für $x = 5$ genau 12 Quadrate. Schauen wir uns letzteren Fall noch mal genauer an. Nachdem wir das 10×10- und die fünf 3×3-Quadrate platziert haben, bleiben entweder oben oder rechts in jedem Fall ein 1×3-Streifen übrig, der nicht nur mit 2×2-Quadraten ausgefüllt werden kann. Es müssen also 1×1-Quadrate verwendet werden und die kleinste theoretische Möglichkeit sind fünf 2×2- und vier 1×1-Quadrate, was zu insgesamt $1 + 5 + 5 + 4 = 15$ Quadraten führen würde.

(ii) Falls in dem oberen, vom 10×10-Quadrat freigelassenen, 3×13-Rechteck vier 3×3-Quadrate platziert werden, geht es bis auf Verschiebungen des 1×3-Streifens aus 1×1-Quadraten, nur wie in Abbildung 6 dargestellt. (Mehr als vier 3×3-Quadrate kann man nicht im oberen 3×13-Rechteck unterbringen.) Bisher werden also bereits 8 Quadrate verwendet und es bleibt ein 3×10-Rechteck zu fliesen, bei dem man höchstens drei weitere 3×3-Quadrate verwenden kann. Sei nun x die Anzahl der zusätzlichen 3×3-Quadrate ($0 \leq x \leq 3$). Neben diesen x zusätzlichen Quadraten werden noch mindestens $\frac{3\cdot 10-x\cdot 3^2}{2^2} = \frac{30-9x}{4}$ weitere Quadrate benötigt. Für $x \leq 2$ würde man also mindestens 13 Quadrate benötigen. Für den Fall $x = 3$ bleibt nur ein 1×3-Streifen übrig, der mit drei 1×1 Quadraten gefüllt werden müsste, so dass sich insgesamt 14 benötigte Quadrate ergeben würden.

(iii) Falls genau sechs 3×3-Quadrate verwendet werden, so bleibt eine Fläche von $13^2 - 10^2 - 6 \cdot 3^2 = 15$ Einheitsquadraten mit 1×1- und 2×2-Quadraten zu überdecken. Da 15 bei Division durch $2^2 = 4$ den Rest drei hat, muss die Anzahl der verwendeten 1×1-Quadrate 3, 7, 11 oder 15 betragen. Die entsprechenden Anzahlen der benötigten 2×2-Quadrate betragen 3, 2, 1 oder 0, so dass sich insgesamt mindestens 13 Quadrate ergeben.

(d) Wir nummerieren die elf verwendeten Fliesen von 1 bis 11 durch und führen Variablen x_i für ihre Seitenlängen ein, siehe Abbildung 7. Gehen wir zeilen- und spaltenweise durch, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x_2 + x_1 &= 13\\
x_7 + x_6 + x_{11} + x_1 &= 13\\
x_7 + x_6 + x_9 + x_3 &= 13\\
x_8 + x_6 + x_9 + x_3 &= 13\\
x_8 + x_{10} + x_4 + x_3 &= 13\\
x_5 + x_4 + x_3 &= 13\\
x_2 + x_7 + x_8 + x_5 &= 13\\
x_2 + x_6 + x_{10} + x_5 &= 13\\
x_2 + x_6 + x_4 &= 13\\
x_2 + x_{11} + x_9 + x_4 &= 13\\
x_1 + x_9 + x_4 &= 13\\
x_1 + x_3 &= 13
\end{aligned}$$

Löst man dieses lineare Gleichungssystem mit einem allgemeinen Verfahren, wie beispielsweise dem Gleichsetzungsverfahren, der Einsetzmethode oder auch dem Gauß-Algorithmus, so erhält man nach einer längeren Rechnung eine eindeutige Lösung. Um den Lösungsweg abzukürzen schauen wir uns etwas einfacher strukturierte Gleichungen an, die sich an den Seiten der einzelnen Quadrate ergeben und lösen diese suksessive nach x_1 auf:

$$\begin{aligned}
x_2 + x_1 = 13 &\Rightarrow x_2 = 13 - x_1\\
x_2 + x_{11} = x_1 &\Rightarrow x_{11} = x_1 - x_2 = 2x_1 - 13\\
x_1 + x_3 = 13 &\Rightarrow x_3 = 13 - x_1\\
x_1 + x_{11} = x_9 + x_3 &\Rightarrow x_9 = x_1 + x_{11} - x_3 = 4x_1 - 26\\
x_6 = x_{11} + x_9 &\Rightarrow x_6 = 6x_1 - 39\\
x_4 + x_9 = x_3 &\Rightarrow x_4 = x_3 - x_9 = 39 - 5x_1\\
x_7 + x_6 + x_{11} = x_2 &\Rightarrow x_7 = x_2 - x_6 - x_{11} = 65 - 9x_1\\
x_7 = x_8 &\Rightarrow x_8 = 65 - 9x_1\\
x_7 + x_8 = x_6 + x_{10} &\Rightarrow x_{10} = x_7 + x_8 - x_6 = 169 - 24x_1\\
x_5 = x_8 + x_{10} &\Rightarrow x_5 = 234 - 33x_1\\
x_5 + x_{10} = x_4 &\Rightarrow x_4 = 403 - 57x_1
\end{aligned}$$

Da wir nun zwei Gleichungen für x_4 haben, können wir diese gleichsetzen und nach x_1 auflösen, was zu $x_1 = 7$ führt. Einsetzen liefert $x_1 = 7$, $x_2 = 6$, $x_3 = 6$, $x_4 = 4$, $x_5 = 3$, $x_6 = 3$, $x_7 = 2$, $x_8 = 2$, $x_9 = 2$, $x_{10} = 1$ und $x_{11} = 1$.

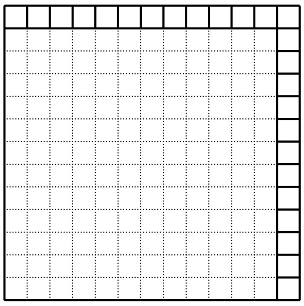


Abbildung 3: Fliesplan für Teilaufgabe (a).

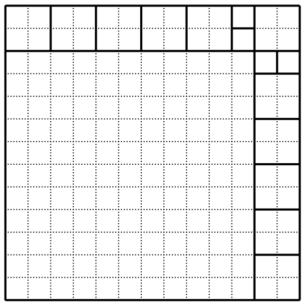


Abbildung 4: Fliesplan für Teilaufgabe (b).

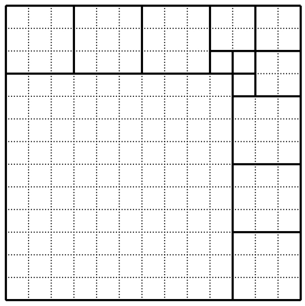


Abbildung 5: Fliesplan für Teilaufgabe (c).

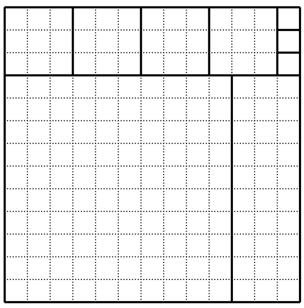


Abbildung 6: Unfertiger Fliesplan für Teilaufgabe (c).

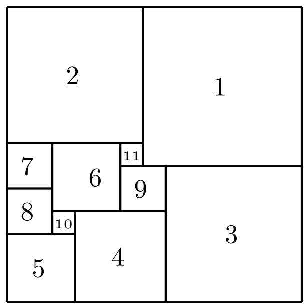


Abbildung 7: Fliesplan für Teilaufgabe (d).

Wie kann man diese Aufgabe mit etwas mehr Mathematik eleganter Lösen? Gerade die Fallunterscheidungen in den Aufgabenteilen (a)–(c) waren doch recht umfangreich. Stellen wir uns zunächst eine etwas allgemeinere Optimierungsaufgabe vor: Ein $n \times n$ Quadrat soll mit Fliesen der Form $a \times a$ gefliest werden, wobei a alle natürlichen Zahlen zwischen 0 und $n-1$ annehmen kann. Wie lautet der kostengünstigste Fliesplan, falls eine $a \times a$-Fliese c_a kostet?

Derartige (diskrete Optimierungs-)Probleme lassen sich in der Regel lösen, indem man sie als Ganzzahliges Lineares Programm modelliert. Hierzu brauchen wir zunächst *Entscheidungsvariablen* – Objekte, die die problemspezifischen Entscheidungen repräsentieren ohne diese festzulegen. Mit geometrischen Strukuren zu *rechnen* ist immer etwas schwierig. Also überlegen wir uns eine andere Darstellungsform des Fliesplans aus Abbildung 7: Wir betrachten eine 13×13-Tabelle und tragen in jedes Feld ein, von welcher Fliesengrösse es bedeckt wird. In unserem Beispiel ergibt sich:

6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
2	2	3	3	3	1	7	7	7	7	7	7	7
2	2	3	3	3	2	2	6	6	6	6	6	6
2	2	3	3	3	2	2	6	6	6	6	6	6
2	2	1	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6
3	3	3	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6
3	3	3	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6
3	3	3	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6

6						7						
2		3			1							
					2		6					
2												
		1	4									
3												

Da die linke Tabelle etwas unübersichtlich ist und man die Grenzen zwischen unterschiedlichen Fliesen nicht so gut erkennen kann, haben wir in der rechten Tabelle nur jeweils die linke obere Ecke einer Fliese markiert. Dies scheint eine recht übersichtliche und kompakte Beschreibung des zugrunde liegenden geometrischen Musters zu sein.

Für die Wahl geeigneter Entscheidungsvariablen benötigen wir noch einen kleinen Modellierungstrick: Anstatt Variablen $x_{i,j}$ für die n^2 Felder unserer Tabelle zu verwenden, verwenden wir Binärvariablen $x_{i,j,h} \in \{0,1\}$. Hierbei soll $x_{i,j,h} = 1$ bedeuten, dass in Feld (i,j) der Tabelle die Zahl h steht. Hiermit können wir relativ leicht ausdrücken, dass in jeder Zelle nur höchstens eine Zahl stehen darf

$$\sum_{h=1}^{n-1} x_{i,j,h} \leq 1 \qquad \forall 1 \leq i,j \leq n.$$

Die Bedingung, dass jedes Feld der Tabelle von genau einer Fliese überdeckt wird, lässt sich etwas komplizierter aber im Prinzip ähnlich durch

$$\sum_{h=1}^{n-1} \sum_{y=0}^{\min(i-1,h-1)} \sum_{x=0}^{\min(j-1,h-1)} x_{i-y,j-x,h} = 1 \qquad \forall 1 \leq i,j \leq n$$

ausdrücken. Da durch „genau eine Fliese“ insbesondere verlangt wird, dass pro Feld *höchstens* eine Fliese liegt, brauchen wir die zuvor genannte Bedingung nicht unbedingt (sie schadet aber auch nicht). Wir müssen noch berücksichtigen, dass keine Fliese über den Rand hinaus ragen soll:

$$x_{i,j,h} = 0 \qquad \forall 1 \leq i,j \leq n \,:\, i+h > n+1 \vee j+h > n+1.$$

Fügen wir nun noch die Zielfunktion

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{n-1} c_h \cdot x_{i,j,j}$$

hinzu, so ist unser verallgemeinertes Anwendungsproblem vollständig als Ganzzahliges Lineares Programm modelliert. Nebenbedingungen wie in den Aufgabenteilen (a)–(c), dass genau eine $k \times k$-Fliese verwendet werden soll, lassen sich durch eine weitere lineare Ungleichung wie

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j,k} = 1$$

erzwingen. Die Minimierung der Anzahl der Fliesen würde $c_h = 1$ entsprechen.

Mit Hilfe einer Modellierungssprache wie beispielsweise ZIMPL können wir folgenden Quellcode schreiben:

```
param n := 13;
set N := {1 to n};
set H := {1 to n-1};
var x[N cross N cross H] binary;
minimize Anzahl: sum <i,j,h> in N cross N cross H: x[i,j,h];
```

```
subto jedes_feld_genau_eine_fliese:
  forall <i,j> in N cross N:
    sum <h> in H:
      sum <y> in {0 to min(i-1, h-1)}:
        sum <x> in {0 to min(j-1, h-1)}: x[i-y,j-x,h] == 1;

subto nicht_ueber_den_rand_hinaus:
  forall <i,j,h> in N cross N cross H with i+h > n+1 or j+h > n+1:
    x[i,j,h] == 0;
```

Das zugehörige Ganzzahlige Lineare Programm wird dann automatisch erstellt und kann mit einem Standardlöser wie beispielsweise `IBM ILOG CPLEX` innerhalb kürzester Zeit gelöst werden. Exemplarisch geben wir in der folgenden Tabelle die Minimale Anzahl an Fliesen für verschiedene n an:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
min #Quadrate	4	6	4	8	4	9	4	6	4	11	4	11	4
Sekunden	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0	0.3	0
B&B-Knoten	1	1	1	1	1	5	1	1	1	39	1	41	1
n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
min #Quadrate	6	4	12	4	13	4	6	4	13	4	8	4	6
Sekunden	0.1	0.1	2	0.1	9	0.2	0.4	0.4	19	0.6	1	1	1
B&B-Knoten	1	1	92	1	168	1	1	1	173	1	1	1	1
n	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
min #Quadrate	4	14	4	15	4	6	4	8	4	15	4	6	4
Sekunden	1	930	2	3148	3	4	4	20	5	12634	9	8	9
B&B-Knoten	1	3341	1	7409	1	1	1	10	1	6911	1	1	1

Diese Zahlenfolge (A018835 in der *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*) „schreit“ geradezu nach weiteren mathematischen Untersuchungen. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass das Minimum 4 beträgt, falls n gerade ist und sonst mindestens 6 Quadrate notwendig sind – was bei durch drei teilbaren n möglich ist. Natürlich sind dies eher mathematische Spielereien, denn ernstzunehmende praktische Anwendungen. Fordert man zusätzlich noch, dass alle Quadrate unterschiedlich groß sein sollen, so gibt es plötzlich einen Zusammenhang mit Widerständen in elektrischen Schaltkreisen (und damit auch den Kirchhoff'schen Regeln), siehe z. B.

`http://en.wikipedia.org/wiki/Squaring_the_square`

oder

`http://www.wissenschaft-online.de/spektrum/statisch/treitz/wi.htm`.

Die *ernsthaften Anwendungen*, die sich hinter dieser Aufgabe verstecken, finden sich in der Vorlesung „Ganzzahlige Optimierung“ oder auch in eingeschränktem Umfang in der Vorlesung „Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler“ hier an der Uni Bayreuth. Dort lernt man eine Vielzahl von Anwendungsproblemen in dieser „Sprache“ auszudrücken. Speziell an Schüler richtet sich unser (reisendes) „Optimierungslabor“[2]. Das algorithmische, effiziente Lösen von Linearen Gleichungssystemen wird in sehr vielen praktischen Anwendungen (die Finite-Elemente-Methode, ein weit verbreitetes modernes Berechnungsverfahren aus dem Ingenieurwesen, führt auf das Lösen sehr großer linearer Gleichungssysteme[3]) benötigt. Ein paar fortgeschrittenere Methoden wie Gauß-Seidel-Verfahren, Cholesky-Zerlegung oder CG-Verfahren werden z. B. in Vorlesungen wie „Einführung in die Numerik“ oder „Numerische Methoden partieller Differentialgleichungen“ behandelt.

Unsere Ausgangsfrage mit der Briefmarke wollen wir natürlich ebenfalls nicht unbeantwortet lassen. Es handelt sich um eine Deutsche Sonderbriefmarke von 1998 zum Internationalen Mathematikerkongress in Berlin. Wir können zum Bestimmen der Seitenlängen genauso

[2] http://www.wm.uni-bayreuth.de/index.php?id=optlabor
[3] http://www.tomshardware.de/Audi-Supercomputer,news-240847.html

vorgehen, wie bei Teilaufgabe (d). Die Nummerierung der Quadrate haben wir in Abbildung 8 angegeben. Gehen wir zeilen- und spaltenweise durch, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 177 \\
x_1 + x_3 + x_6 &= 177 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 177 \\
x_4 + x_5 + x_9 + x_{11} &= 177 \\
x_4 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{11} &= 177 \\
x_4 + x_7 + x_{10} + x_{11} &= 177 \\
x_1 + x_4 &= 176 \\
x_1 + x_5 + x_7 &= 176 \\
x_2 + x_3 + x_5 + x_7 &= 176 \\
x_2 + x_3 + x_5 + x_8 + x_{10} &= 176 \\
x_2 + x_6 + x_9 + x_{10} &= 176 \\
x_2 + x_6 + x_{11} &= 176
\end{aligned}$$

Das könnte man durch den Gauß-Algorithmus lösen, wir kürzen aber wieder ab, indem wir Gleichungen betrachten, die sich an den Seiten der einzelnen Quadrate ergeben.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 = 177 &\quad\Rightarrow\quad x_1 = 177 - x_2 \\
x_1 = x_2 + x_3 &\quad\Rightarrow\quad x_3 = x_1 - x_2 = 177 - 2x_2 \\
x_2 = x_3 + x_6 &\quad\Rightarrow\quad x_6 = x_2 - x_3 = 3x_2 - 177 \\
x_1 + x_4 = 176 &\quad\Rightarrow\quad x_4 = 176 - x_1 = x_2 - 1 \\
x_1 + x_3 = x_4 + x_5 &\quad\Rightarrow\quad x_5 = x_1 + x_3 - x_4 = 355 - 4x_2 \\
x_4 = x_5 + x_7 &\quad\Rightarrow\quad x_7 = x_4 - x_5 = 5x_2 - 356 \\
x_5 = x_7 + x_8 &\quad\Rightarrow\quad x_8 = x_5 - x_7 = 711 - 9x2 \\
x_7 = x_8 + x_{10} &\quad\Rightarrow\quad x_{10} = x_7 - x_8 = 14x_2 - 1067 \\
x_{10} = x_8 + x_9 &\quad\Rightarrow\quad x_9 = x_{10} - x_8 = 23x_2 - 1778 \\
x_6 = x_9 + x_{11} &\quad\Rightarrow\quad x_{11} = x_6 - x_9 = 1601 - 20x_2 \\
x_{11} = x_9 + x_{10} &\quad\Rightarrow\quad x_{11} = 37x_2 - 2845
\end{aligned}$$

Da wir nun zwei Gleichungen für x_{11} haben, können wir diese Gleichsetzung und nach x_2 auflösen, was zu $x_2 = 78$ führt. Einsetzen liefert $x_1 = 99$, $x_2 = 78$, $x_3 = 21$, $x_4 = 77$, $x_5 = 43$, $x_6 = 57$, $x_7 = 34$, $x_8 = 9$, $x_9 = 16$, $x_{10} = 25$ und $x_{11} = 41$.

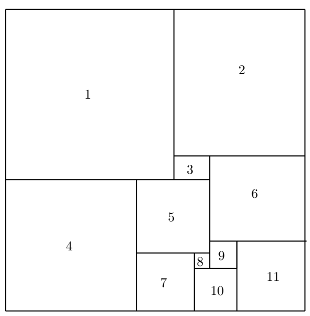
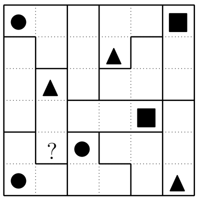
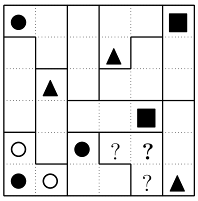


Abbildung 8: Quadratzerlegung eines 176 × 177-Rechtecks.

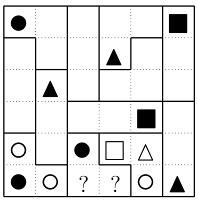
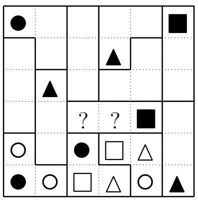
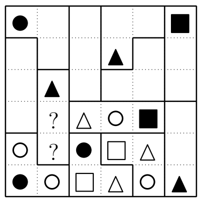
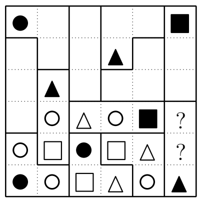
Aufgabe 4:

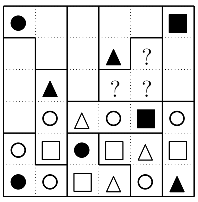


In dem Feld mit dem Fragezeichen kann entweder ein Quadrat oder ein Dreieck stehen. In keinem Fall kann das Gebiet links unten davon mit unterschiedlichen Symbolen ausgefüllt werden.

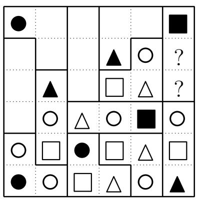
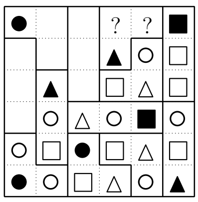


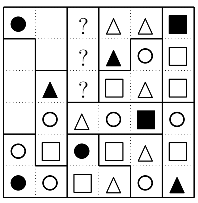
An das Gebiet mit den Fragezeichen grenzt jedes der drei Symbole an, es müssen also unterschiedliche Symbole verwendet werden. Wäre das fett gedruckte Fragezeichen ein Kreis, so müsste das Feld eins nach links und eins nach unten ebenfalls einen Kreis enthalten, was nicht sein kann, da das entsprechende Gebiet mit drei unterschiedlichen Symbolen gefüllt werden muss. Somit muss das fett gedruckte Fragezeichen durch ein Dreieck ersetzt werden und die anderen beiden Symbole des Gebietes ergeben sich wie abgebildet. Wir füllen nun der Reihe nach die Gebiete mit den Fragezeichen auf eindeutige Art und Weise aus.

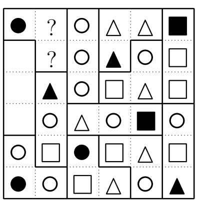
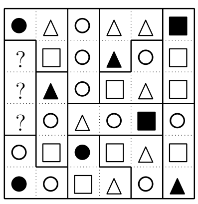
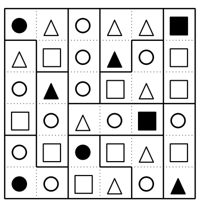


Da an das durch Fragezeichen markierte Gebiet bereits alle drei Symbole angrenzen, muss es drei unterschiedliche Symbole enthalten, was nur auf eine Art und Weise möglich ist.

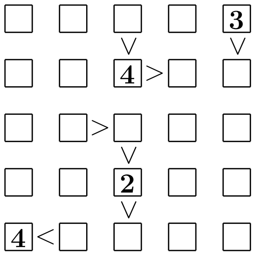





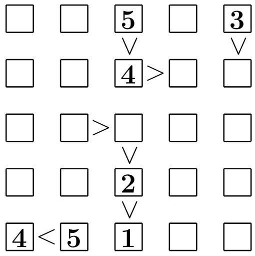
Da in dem durch Fragezeichen markiertem Gebiet kein einziges Feld ein Dreieck beinhalten kann, muss dieses Gebiet durch lauter gleiche Symbole ausgefüllt werden. Da es zu Dreiecken und einem Quadrat benachbart ist, bleiben nur Kreise übrig.

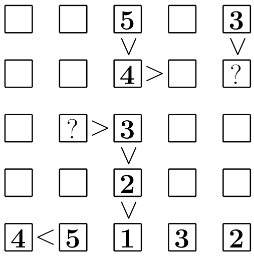




Aufgabe 5:

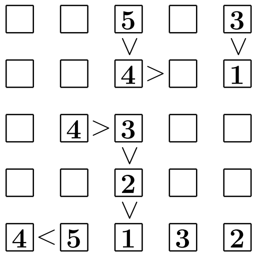


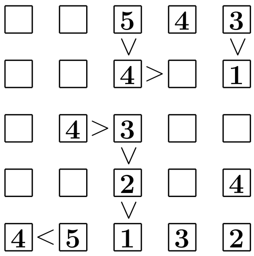
Ausgehend von der Startkonfiguration links stellen wir fest, dass es bei den Zahlen von 1 bis 5 nur genau eine gibt die größer als 4 ist, die 5, und ebenfalls nur genau eine Ziffer gibt, die kleiner als 2 ist, die 1. Tragen wir dies ein, so erhalten wir den Zustand rechts.



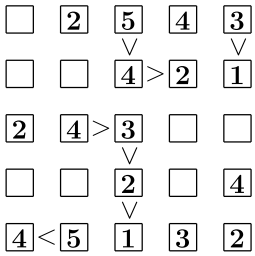


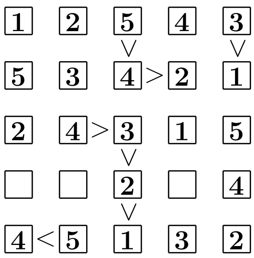
Da in jeder Zeile und Spalte die Ziffern von 1 bis 5 genau ein Mal verwendet werden sollen, können wir die dritte Spalte und die letzte Zeile eindeutig ergänzen. Im Anschluß daran können wir die Felder mit den Fragezeichen eindeutig ausfüllen.





Da jede Ziffer in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Mal vorhanden sein muss ergeben sich der Reihe nach die 4er und die 2er.





Nun kann man noch der Reihe nach die ersten drei Zeilen und dann die vierte ausfüllen.